Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 178

Heft 3

Ausgegeben am 24. Februar 1938

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin W 35 und Leipzig

1938

Band 178. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Barna, Béla, Zur elementaren Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels . .	129
Strubecker, Karl, Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes	135
Egerváry, Eugen, Über ein Minimumproblem der Elementargeometrie	174
Aumann, Georg, Über lokale Ordnungseigenschaften der konformen Abbildungen	187
Achter Wettbewerb der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E.V.. . .	192

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Zur elementaren Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels.

Von *Béla Barna* in Debrecen.

1. Die vorliegende Arbeit soll eine elementare Behandlung des zwischen der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion bestehenden Zusammenhanges geben, dessen vollständiger Aufbau in den Abhandlungen von Ludwig von Dávid ausführlich behandelt wurde[1]). Im folgenden werden wir von der Dávidschen Theorie lediglich in zwei Punkten abweichen: Es ist mir nämlich gelungen, die Dávidsche Verwendung der sogenannten Legendreschen Differentialgleichung sowie die der ϑ-Reihen zu vermeiden.

2. Wir beginnen mit einer kurzen Zusammenfassung bekannter Resultate, zu denen wir — wie es in den Abhandlungen von Dávid der Fall ist — elementar-funktionentheoretisch gelangen können.

I. Es sei die Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 \dots \end{Vmatrix}$$

nach dem Lagrange-Gaußschen Algorithmus gebildet, d. h. es sei

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots;\ a_0 = a,\ b_0 = b).$$

Dann konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n) bei jeder[2]) Matrix gegen einen gemeinsamen Grenzwert $M(a, b)$, das arithmetisch-geometrische Mittel von a, b. Unter diesen unendlich vielen Werten $M(a, b)$ befindet sich immer der Wert 0, zu dem im Fall $ab(a^2 - b^2) \neq 0$ (was wir immer voraussetzen wollen) die unendlich oszillierenden Matrizen[3]) und nur diese führen.

II. Unter den Werten $M(a, b)$ gibt es im Fall $\arg a - \arg b \neq \pm \pi$ einen, $\overline{M}(a, b)$, der das absolut größte aller Mittel ist; zu diesem Wert führt der Algorithmus, für den die Vorzeichen der Wurzeln gemäß der Bedingung $\Re\left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) \geqq 0$ gewählt werden. Im Fall $\arg a - \arg b = \pm \pi$ gibt es zwei, zur Geraden ab symmetrisch liegende Mittel $\overline{M}(a, b)$, nämlich $\overline{M}(a_1, b_1)$ und $\overline{M}(a_1, -b_1)$.

---

[1]) L. v. Dávid, Arithmetisch-geometrisches Mittel und Modulfunktion, dieses Journal **159** (1928). — Vergl. H. Geppert, Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels, Math. Ann. **99** (1928), wo diese Dávidsche Arbeit nach der geometrischen Seite hin ergänzt wurde.

[2]) Es ist nämlich die Anzahl der möglichen Zahlenpaare wegen der Zweideutigkeit der Quadratwurzel $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ gleich 2^n; es sind also unendlich viele, aus demselben Zahlenpaar hervorgehende verschiedene Matrizen vorstellbar.

[3]) Bezüglich der oszillierenden Matrix s. von Dávid, l. c. [1]), S. 156.

III. Es gehört zu jedem von 0 verschiedenen Mittel $M(a, b)$ ein kleinster nicht negativer Index ν derart, daß $\overline{M}(a_\nu, b_\nu) = M(a, b)$ ist.

IV. Jeder Wert $M(a, b)$ genügt der Gleichung $\eta M(a, b) = M(\eta a, \eta b)$ (η *beliebig*).

V. Es sei $c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$; $c_0 = c$). Dann gibt es für jedes n einen Wert $M^*(a_n, c_n)$ unter den $M(a_n, c_n)$ so, daß $\overline{M}(a, c) = 2^n M^*(a_n, c_n)$ ist.

VI. Die Funktion $\overline{M}(1, z)$ ist eindeutig und regulär-analytisch in der längs der negativ reellen Achse aufgeschnittenen z-Ebene.

VII. Unabhängig von der Art, wie z gegen 0 geht, ist[4])

$$\lim_{z \to 0} \overline{M}(1, z) \log z = -\frac{\pi}{2}.$$

3. Unsere erste Aufgabe ist die Herleitung eines zwischen $\overline{M}(1, z)$, $\overline{M}(1, -z)$ und $\overline{M}(1, \sqrt{1 - z^2})$ bestehenden Zusammenhanges.

Wir bezeichnen schlechthin das in V definierte, dem Wert $\overline{M}(a, c)$ zugeordnete $M^*(a_n, c_n)$ mit $M(a, c)$. Da für jedes Paar a_n, b_n des zu $\overline{M}(a, b)$ führenden Algorithmus $\overline{M}(a_n, b_n) = \overline{M}(a, b)$ ist, so folgt nach V:

$$\frac{\overline{M}(a, b)}{\overline{M}(a, c)} \frac{M(a_n, c_n)}{\overline{M}(a_n, b_n)} = \frac{1}{2^n}. \tag{1}$$

Wenn also

$$\frac{\overline{M}(a, b)}{\overline{M}(a, c)} \frac{M(a_n, c_n)}{\overline{M}(a_n, b_n)} \log \frac{4 a_n}{c_n} = u_n$$

gesetzt wird, so besteht nach (1) die Gleichung

$$u_n = \frac{1}{2^n} \log \frac{4 a_n}{c_n}. \tag{2}$$

Es ist aber nach I und V

$$\frac{16 a_n^2}{c_n^2} = \frac{a_n^2}{a_{n+1}^2} \frac{4 a_{n+1}}{c_{n+1}},$$

d. h.

$$\log \frac{4 a_n}{c_n} = \log \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{1}{2} \log \frac{4 a_{n+1}}{c_{n+1}} + 2 \varepsilon_n \pi i, \tag{3}$$

wo — um den Hauptwert des Logarithmus nehmen zu können — $\varepsilon_n = 0, \pm 1$ ist. Aus (2) und (3) folgt nun:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{2^n} \left[\log \frac{a_n}{a_{n+1}} + 2 \varepsilon_n \pi i \right],$$

und wegen

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots$$

bekommen wir endlich die Formel:

$$\frac{\overline{M}(a, b)}{\overline{M}(a, c)} \lim \frac{M(a_n, c_n)}{\overline{M}(a_n, b_n)} \log \frac{4 a_n}{c_n} = \log \frac{4 a}{c} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\log \frac{a_n}{a_{n+1}} + 2 \varepsilon_n \pi i \right]. \tag{4}$$

Nun ist noch der hier auftretende Grenzwert zu bestimmen. Das erleichtert uns der folgende

---

[4]) B. Barna, Ein Limessatz aus der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels, dieses Journal **172** (1934).

Hilfssatz 1. *Für jeden von Null verschiedenen eindeutigen Zweig der Funktion* $M(1, z)$ *ist*

$$\lim_{z\to 0} M(1, z) \log z = -\frac{\pi}{2}.$$

Beweis. Für $\overline{M}(1, z)$ ist diese Behauptung in VII enthalten. Es sei also $M(1, z)$ ein von diesem verschiedener Funktionszweig. Nach III können wir einen Index ν so bestimmen, daß die Gleichung

$$\overline{M}(a_\nu, b_\nu) = M(1, z) \tag{5}$$

gilt, wo das Zahlenpaar a_ν, b_ν das ν-te Glied des von den Zahlen a, b ausgehenden Algorithmus ist und $a_\nu = a_\nu(z), b_\nu = b_\nu(z)$ algebraische Funktionen von z sind (vgl. I). Es ist weiter durch vollständige Induktion leicht beweisbar, daß für jedes n

$$\lim a_n = 2^{-n}, \quad \lim b_n = 0, \quad \lim \frac{\log z}{\log \frac{b_n}{a_n}} = 2^n \tag{6}$$

ist[5]). Aus (5) folgt nun, daß

$$\lim M(1, z) \log z = \lim \overline{M}(a_\nu, b_\nu) \log z,$$

also nach IV

$$\lim M(1, z) \log z = \lim \left[\frac{1}{a_\nu} \frac{\overline{M}\left(1, \frac{b_\nu}{a_\nu}\right) \log \frac{b_\nu}{a_\nu} \log z}{\log \frac{b_\nu}{a_\nu}} \right]$$

ist. Wendet man noch die Formeln (6) und VII an, so erhält man die Behauptung

$$\lim M(1, z) \log z = \lim \overline{M}\left(1, \frac{b_\nu}{a_\nu}\right) \log \frac{b_\nu}{a_\nu} = -\frac{\pi}{2}.$$

Jetzt kann man den Grenzwert in (4) sehr einfach bestimmen. Es genügt, den Fall $a = 1$, $b = \sqrt{1 - z^2}$, $c = z$ zu betrachten; um die Eindeutigkeit der Funktionen $\overline{M}(1, z)$ und $\overline{M}(1, \sqrt{1 - z^2})$ zu erreichen, nehmen wir den Wert der Quadratwurzel[6]) mit $\Re(\sqrt{1 - z^2}) > 0$ und schließen die reellen Werte von z aus. Nach Hilfssatz 1 gilt für jeden von Null verschiedenen Wert $M\left(1, \frac{c_n}{a_n}\right)$ die Gleichung

$$\lim_{\frac{c_n}{a_n}\to 0} M\left(1, \frac{c_n}{a_n}\right) \log \frac{c_n}{a_n} = -\frac{\pi}{2}.$$

Da aber $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{M}(1, z)$ ist, so folgt noch:

$$\lim_{n\to\infty} \left[a_n M\left(1, \frac{c_n}{a_n}\right) \log \frac{c_n}{a_n} \right] = \lim_{n\to\infty} M(a_n, c_n) \log \frac{c_n}{a_n} = -\frac{\pi}{2} \overline{M}(1, z),$$

wodurch man schließlich das Ergebnis

$$\lim \frac{M(a_n, c_n)}{\overline{M}(a_n, b_n)} \log \frac{4 a_n}{c_n} = \frac{\pi}{2}$$

bekommt. Setzen wir dies in die Formel (4) ein, so erhalten wir[7])

$$\frac{\pi}{2} \frac{\overline{M}(1, \sqrt{1 - z^2})}{\overline{M}(1, z)} = \log \frac{4}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\log \frac{a_n}{a_{n+1}} + 2\varepsilon_n \pi i \right].$$

---

[5]) Wir schreiben der Einfachheit halber lim statt $\lim_{z\to 0}$.

[6]) Wir werden später auch den Fall $\Re(\sqrt{1 - z^2}) < 0$ in Betracht ziehen, sowie den Fall $\Re(z) = 0$ (s. die Fußnote 8).

[7]) Vergl. C. F. Gauß, Werke XI, S. 217.

Da die Glieder der unendlichen Reihe unverändert bleiben, wenn man $(-z)$ statt z schreibt, gilt auch die Formel

$$\frac{\pi}{2}\frac{\overline{M}(1,\sqrt{1-z^2})}{\overline{M}(1,-z)} = \log\frac{4}{-z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\log\frac{a_n}{a_{n+1}} + 2\varepsilon_n\pi i\right].$$

Aus den beiden letzten Formeln ergibt sich jetzt die Gleichung

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{\overline{M}(1,\sqrt{1-z^2})}{\overline{M}(1,z)} - \frac{\overline{M}(1,\sqrt{1-z^2})}{\overline{M}(1,-z)}\right] = \log(-z) - \log z = \pm\pi i\,,$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem z in der oberen oder unteren Halbebene liegt. Wir wollen dieser Gleichung die folgende einfachere Form geben:

$$\frac{1}{\overline{M}(1,z)} - \frac{1}{\overline{M}(1,-z)} = \frac{-\operatorname{sgn}\Im(z)\,2i}{\overline{M}(1,\sqrt{1-z^2})}. \tag{7}$$

Hier ist — wie erwähnt — der Wert von $\sqrt{1-z^2}$ mit $\Re(\sqrt{1-z^2}) > 0$ zu nehmen. Wir können uns aber von dieser Beschränkung befreien, wenn wir $\sqrt{1-z^2}$ durch z ersetzen. Dann ist statt $\sqrt{1-z^2}$ in (7) $\sqrt{z^2} = \pm z$ den Fällen $\Re(z) \gtrless 0$ entsprechend zu nehmen. Die so entstehenden Formeln können wir mittels (7) in der Form

$$\frac{1}{\overline{M}(1,z)} = \frac{1}{\overline{M}(1,-z)} - \frac{\operatorname{sgn}\Im(z)\,2i}{\overline{M}(1,-\sqrt{1-z^2})} - \frac{\operatorname{sgn}\Im(z)\operatorname{sgn}\Im(\sqrt{1-z^2})\,4}{\overline{M}(1,\varepsilon z)} \tag{8}$$

schreiben, wo $\varepsilon = \operatorname{sgn}\Re(z)$ ist. Wegen $\Re(\sqrt{1-z^2}) > 0$ ist aber

$$\operatorname{sgn}\Im(z)\operatorname{sgn}\Im(\sqrt{1-z^2}) = -\operatorname{sgn}\Re(z),$$

also nimmt (8) die Gestalt

$$\frac{1}{\overline{M}(1,z)} = \frac{1}{\overline{M}(1,-z)} - \frac{\operatorname{sgn}\Im(z)\,2i}{\overline{M}(1,-\sqrt{1-z^2})} + \varepsilon\frac{4}{\overline{M}(1,\varepsilon z)}$$

an. Diese und die Formel (7) werden zusammengefaßt durch

Satz 1. *Für jedes z mit $\Re(z)\cdot\Im(z) \neq 0$ gilt die Formel*[8])

$$\frac{1}{\overline{M}(1,z)} - \frac{1}{\overline{M}(1,-z)} = \frac{-\operatorname{sgn}\Im(z)\,2i}{\overline{M}(1,\sqrt{1-z^2})} + \varkappa\varepsilon\frac{4}{\overline{M}(1,\varepsilon z)} \qquad (\varepsilon = \operatorname{sgn}\Re(z)),$$

wo $\varkappa = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, *je nachdem* $\Re(\sqrt{1-z^2}) \gtrless 0$ *ist.*

Aus diesem Satz ergeben sich die folgenden später anzuwendenden Formeln, wenn statt z die Zahlen $\frac{b}{a}$ bzw. $\frac{a}{b}$ geschrieben werden und V angewandt wird:

---

[8]) Der Inhalt dieses Satzes wurde bereits von Gauß entdeckt (s. Werke XI, S. 219). — Vergl. C. F. Gauß-H. Geppert, Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes. Nachlaß zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion (1927), S. 139 u. 207, Anm. 48a. Der Weg, auf dem Gauß zu diesem Ergebnis vorgedrungen ist, kann nicht mit voller Sicherheit angegeben werden. Eine Aufzeichnung von 1825 weist darauf hin, daß Gauß diese Formel mit Hilfe der Thetanullreihen gefunden hat. Vergl. Gauß, Werke XI, S. 550.

Die Formel von Satz 1 kann man übrigens auch in den Fällen $\Re(z) = 0$ und $\Im(z) = 0$ gültig machen; die so entstehenden Formeln benötigen wir aber nicht. Wir geben aus unseren Ergebnissen die folgenden Beispiele: Es sei $-1 < z < +1$; dann ist

$$\frac{1}{\overline{M}(1,z)} = \frac{1}{\overline{M}(1,-z)} \mp \frac{\operatorname{sgn} z\cdot 2i}{\overline{M}(1,\sqrt{1-z^2})}, \quad \text{wenn } \sqrt{1-z^2} > 0 \text{ ist,}$$

$$\frac{1}{\overline{M}(1,z)} = \frac{1}{\overline{M}(1,-z)} \mp \frac{\operatorname{sgn} z\cdot 2i}{\overline{M}\left(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{2}, \pm i\left|\frac{\sqrt{1-z^2}}{2}\right|\right)} + \frac{\operatorname{sgn} z\cdot 4}{\overline{M}\left(\frac{1-|z|}{2}, \pm i\left|\frac{\sqrt{z}}{2}\right|\right)}, \quad \text{wenn } \sqrt{1-z^2} < 0 \text{ ist,}$$

worin gleichzeitig das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist.

$$\frac{1}{\overline{M}(a,b)} = \frac{1}{\overline{M}(a,-b)} - \frac{\operatorname{sgn}\Im\left(\frac{b}{a}\right)2i}{\overline{M}(a,c)} + \varkappa\varepsilon\frac{4}{\overline{M}(a,\varepsilon b)}, \tag{9}$$

$$\varkappa = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \text{ je nachdem } \Re\left(\frac{c}{a}\right) \gtrless 0, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}\Re\left(\frac{b}{a}\right),$$

$$\frac{1}{\overline{M}(a,b)} = \frac{-1}{\overline{M}(a,-b)} - \frac{\operatorname{sgn}\Im\left(\frac{a}{b}\right)2i}{\overline{M}(b,ic)} + \varkappa\varepsilon\frac{4}{\overline{M}(b,\varepsilon a)}, \tag{10}$$

$$\varkappa = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \text{ je nachdem } \Re\left(\frac{ic}{b}\right) \gtrless 0, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}\Re\left(\frac{a}{b}\right).$$

4. Jetzt ist die Herleitung des zwischen den unendlich vielen Werten der Funktionen $M(a,b)$ und $M(a,c)$ bestehenden Zusammenhanges möglich. Zu dem Zweck verstehen wir im folgenden unter c_n denjenigen Wert von $\sqrt{a_n^2 - b_n^2}$, für den

$$\Re\left(\frac{c_n}{a_n}\right) \geqq 0 \tag{11}$$

ist.

Wir wollen zuerst die Funktion $\overline{M}(a_1, c_1)$ durch $\overline{M}(a,b)$ und $\overline{M}(a,c)$ darstellen. Dazu berücksichtigen wir, daß nach II

$$\overline{M}(a_1,c_1) = \frac{1}{2}\overline{M}(a,c), \qquad \text{wenn} \quad \Re\left(\frac{a-b}{a+b}\right) \geqq 0 \text{ ist}, \tag{12}$$

$$\overline{M}(a_1,c_1) = \frac{1}{2}\overline{M}(b, \pm ic), \quad \text{wenn} \quad \Re\left(\frac{a-b}{a+b}\right) < 0 \text{ ist}, \tag{13}$$

wo den Fällen $\Re\left(\frac{ic}{b}\right) \gtrless 0$ entsprechend das obere bzw. untere Vorzeichen gewählt werden soll. Im Fall $\Re\left(\frac{ic}{b}\right) > 0$ ist nach (11) in den Formeln (9) und (10) $\varkappa = 0$. Mittels (13) ergibt sich aus den so entstandenen Formeln:

$$\frac{1}{\overline{M}(a_1,c_1)} = \frac{2}{\overline{M}(a,c)} - \frac{\operatorname{sgn}\Im\left(\frac{b}{a}\right)2i}{\overline{M}(a,b)}. \tag{14}$$

Wenn $\Re\left(\frac{ic}{b}\right) < 0$ ist, erhalten wir aus Satz 1 $\left(\text{mit } z = \frac{ic}{b} \text{ bzw. } z = \frac{b}{ic}\right)$ und (13) gleicherweise das Ergebnis:

$$\frac{1}{\overline{M}(a_1,c_1)} = \frac{-\operatorname{sgn}\left[\Re\left(\frac{b}{a}\right)\Im\left(\frac{ic}{b}\right)\right]2}{\overline{M}(a,c)} + \frac{\operatorname{sgn}\Im\left(\frac{ic}{b}\right)2i}{\overline{M}(a,b)}. \tag{15}$$

Die Formeln (12), (14) und (15) sind in der Gleichung

$$\frac{1}{\overline{M}(a_1,c_1)} = \frac{2k}{\overline{M}(a,c)} + \frac{2li}{\overline{M}(a,b)} \tag{16}$$

enthalten, wo k und l ganze Zahlen sind und $k \neq 0$ ist.

Durch diese Formel kann man auch den Wert $\overline{M}(a_1,b_1)$ durch $\overline{M}(a,b)$ und $\overline{M}(a,c)$ ausdrücken. Es ist nämlich

$$\begin{cases} \overline{M}(a,b) = \overline{M}(a_1,b_1) & \text{im Fall } \Re\left(\frac{b_1}{a_1}\right) > 0, \\ \overline{M}(a,b) = \overline{M}(a_1,-b_1) & \text{im Fall } \Re\left(\frac{b_1}{a_1}\right) < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Im letzten Fall ist noch die Formel (9) mit a_1, b_1, c_1 statt a, b, c und (wegen 11) mit $\varkappa = 0$ anzuwenden, und aus (16) bekommt man[9])

$$\frac{1}{\overline{M}(a_1, b_1)} = \frac{1}{\overline{M}(a, b)} \pm \frac{4ki}{\overline{M}(a, c)} \pm \frac{4l}{\overline{M}(a, b)}.$$

Diese und die Formeln (17) faßt endlich die Gleichung

$$\frac{1}{\overline{M}(a_1, b_1)} = \frac{4K+1}{\overline{M}(a, b)} + \frac{4Li}{\overline{M}(a, c)} \tag{18}$$

zusammen, worin K und L ganze Zahlen sind.

Aus (16), (18) und III folgt jetzt durch Anwendung einer vollständigen Induktion der

Hilfssatz 2. *Jeder Wert von* $M(a_n, c_n)$ *bzw.* $M(a_n, b_n)$ *ist in der Form*

$$\frac{1}{M(a_n, c_n)} = \frac{2k_n}{\overline{M}(a, c)} + \frac{2l_n i}{\overline{M}(a, b)}, \qquad \frac{1}{M(a_n, b_n)} = \frac{4K_n+1}{\overline{M}(a, b)} + \frac{4L_n i}{\overline{M}(a, c)}$$

darstellbar, wo $n \geqq 1$, k_n, l_n, K_n *und* L_n *ganze Zahlen sind.*

Man bezeichne noch mit $\bar{a}_n$ und $\bar{c}_n$ die allgemeinen Glieder des zu $M(a, c)$ führenden Algorithmus, d. h. es sei

$$\bar{a}_{n+1} = \frac{\bar{a}_n + \bar{c}_n}{2}, \quad \bar{c}_{n+1} = \sqrt{\bar{a}_n \bar{c}_n}, \quad \bar{b}_n = \sqrt{\bar{a}_n^2 - \bar{c}_n^2}, \quad \Re\left(\frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_n}\right) > 0, \quad \bar{a}_0 = a, \quad \bar{c}_0 = c.$$

Dann folgt ebenso der

Hilfssatz 3. *Jeder Wert von* $M(\bar{a}_n, \bar{b}_n)$ *bzw.* $M(\bar{a}_n, \bar{c}_n)$ *ist in der Form*

$$\frac{1}{M(\bar{a}_n, \bar{b}_n)} = \frac{2\bar{k}_n}{\overline{M}(a, b)} + \frac{2\bar{l}_n i}{\overline{M}(a, c)}, \qquad \frac{1}{M(\bar{a}_n, \bar{c}_n)} = \frac{4\bar{K}_n+1}{\overline{M}(a, c)} + \frac{4\bar{L}_n i}{\overline{M}(a, b)}$$

darstellbar, wo $n \geqq 1$, $\bar{k}_n, \bar{l}_n, \bar{K}_n$ *und* $\bar{L}_n$ *ganze Zahlen sind.*

Aus den Hilfssätzen 2 und 3 ergibt sich nun der

Satz 2. *Jeder Zweig der Funktionen* $M(a, b)$ *und* $M(a, c)$ *ist in der Form*

$$\frac{1}{M(a, b)} = \frac{\alpha}{\overline{M}(a, b)} + \frac{\beta i}{\overline{M}(a, c)}, \qquad \frac{1}{M(a, c)} = \frac{\gamma i}{\overline{M}(a, b)} + \frac{\delta}{\overline{M}(a, c)}$$

mit

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 4$$

darstellbar.

Die obigen Ergebnisse führen uns nun leicht zur Theorie der Modulfunktion und zu deren bekannten Resultaten.

---

[9]) Es ist hier auch die Bestimmung des entsprechenden Vorzeichens möglich; wegen der Kompliziertheit des so entstehenden Ausdruckes gebrauchen wir aber diese einfache Schreibweise. Das ist um so mehr zulässig, als die Kenntnis des Vorzeichens im nachstehenden unwichtig ist.

Eingegangen 1. Juli 1937.

Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes.

Von *Karl Strubecker* in Wien.

Einleitung.

Während die algebraische und die Differentialgeometrie der *isotropen Ebene* I_2 als bereits hinreichend bekannt gelten darf [1]), sind zu einer Geometrie des *isotropen Raumes* I_3 bisher kaum Ansätze vorhanden. Es ist der Zweck dieser Note, zunächst gewisse *algebraisch-gruppentheoretische Grundlagen* dieser Geometrie des isotropen Raumes zu schaffen. Es ergeben sich dabei etwa im Vergleiche mit einem euklidischen oder pseudoeuklidischen Raume manche dort unbekannte Neuerscheinungen, welche das Interesse des Geometers wohl in Anspruch nehmen dürfen. Zum Beispiel ist die *Hauptgruppe* hier *achtgliedrig*, aber erst gegen eine *fünfgliedrige invariante Untergruppe von Grenzbewegungen* haben irgend zwei Grundelemente (Punkte, Geraden, Ebenen) in allen Fällen Invarianten. Die Metrik ist dabei in sich dual. Diese *Grenzgruppe* G_5 wird also einer systematischen Darstellung der Geometrie des isotropen Raumes I_3 als Fundament dienen können.

Die Grenzgruppe, späterhin mit G_5^r bezeichnet, vertauscht die *Flächenelemente* allgemeiner Lage von I_3 einfach transitiv, wodurch man die Möglichkeit erhält, die Geometrie dieser Flächenelemente zu identifizieren mit der Kinematik der Grenzgruppe G_5^r von I_3. Die Flächenelemente verlieren dabei ihren projektiven Charakter und werden zu Repräsentanten der Lagemöglichkeiten von I_3 gegen G_5^r, zu *Somen* des isotropen Raumes hinsichtlich seiner Grenzgruppe. Ist G_5^l die zu G_5^r reziproke Gruppe, so trägt die Gruppe $G_9 = G_5^r \cdot G_5^l$ im Sinne der neueren Kinematik den natürlichen Äquivalenzbegriff der Bewegungsgeometrie des isotropen Raumes. An anderer Stelle [2]) habe ich gezeigt und hier kurz wiederholt, wie diese Auffassung der Flächenelemente als Somen von G_5^r auf die bekannte Liesche Abbildung dieser Flächenelemente auf Punkte des R_5 [3]) führt. Der R_5 ist dabei einfach der Parameterraum der Grenzgruppe. Die Gruppe G_9 kann in diesem R_5, wenn man ihn wieder zu einem isotropen Raum I_5 ausgestaltet, als dessen *Grenzgruppe* von Bewegungen gedeutet werden. Daraus leitet man einen *Abschluß* der als Somen aufzufassenden Flächenelemente von I_3 zu einem *natürlichen Kontinuum* her, das den Zusammenhang des konform abgeschlossenen I_5 hat, d. i. jenen eines Kegels zweiter Ord-

[1]) H. Beck, Zur Geometrie in der Minimalebene, Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. **12** (1912), S. 14—30.

L. Berwald, Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie in einer Minimalebene, Monatshefte f. Math. Phys. **20** (1915), S. 211—228.

E. Study, Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven, Trans. Amer. Math. Soc. **10** (1909), S. 1—49.

K. Strubecker, Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes (Ein Beitrag zur Kinematik der Minimalebene), Monatsh. f. Math. Phys. **42** (1935), S. 309—376.

[2]) K. Strubecker, Gruppentheoretische Begründung der Lieschen Deutung der Flächenelemente (x, y, z, p, q) des R_3 als Punkte des R_5, Monatsh. f. Math. Phys. **44** (1936), S. 295—306.

[3]) S. Lie - G. Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen **1**, Leipzig 1896, S. 522.

nung im R_6. Man ist damit in der Lage, auf eine natürliche, nämlich gruppentheoretisch bedingte Art, die Singularitäten der erwähnten ersten Lieschen Abbildung zu heben.

S. Lie hat neben diese erste noch eine *zweite Abbildung* der Flächenelemente des R_3 auf Punkte des R_5 gestellt, durch welche ein- und zweifach ausgedehnte Elementvereine des R_3 auf Kurven und Flächen eines linearen Komplexes übertragen werden [4]). Hier wird nun gezeigt, wie diese zweite Liesche Abbildung auf gruppentheoretischem Wege aus der ersten gewonnen werden kann. Man hat in die Darstellung der Gruppe G_5^r nur *kanonische* Parameter und Variable einzuführen. Der Raum R_5 ist kanonischer Parameterraum der Gruppe G_5^r. Dabei übertragen sich die Gruppen G_5^r, G_5^l auf zwei neue reziproke projektive Gruppen S_5^r, S_5^l des R_5, und es ist bemerkenswert, daß, falls man die Bildräume I_5 und R_5 identifiziert, die Übergruppen $G_9 = G_5^r \cdot G_5^l$ und $S_9 = S_5^r \cdot S_5^l$ zusammen fallen und sich, wie erwähnt, als Grenzgruppe G_9 des isotropen Raumes I_5 auffassen lassen. Das zugehörige *natürliche Kontinuum* von Flächenelementen (genauer: Somen) von I_3 erhält jetzt, da I_5 projektiv abzuschließen ist, *senären Zusammenhang*. Die zweite Liesche Abbildung ist in diesem senären Kontinuum *singularitätenfrei*.

Es hätte keine Schwierigkeit, die *Geometrie des isotropen* I_5 mit eben denselben Hilfsmitteln zu behandeln, wie jene von I_3. Wir haben dies nur zum Teil durchgeführt.

In den späteren Kapiteln sind die *ein-* und *zweigliedrigen kontinuierlichen Untergruppen* der Gruppen G_5^r, G_5^l, S_5^r, S_5^l besprochen. Die ersten, weil sie wohl den besten Überblick über die Struktur der Transformationen dieser Gruppen gewähren, die letzten deshalb, weil von ihnen im Schlußkapitel eine, wie mir scheint, schöne Anwendung gemacht ist auf gewisse (in zwei Sonderfällen von F. P. Smith [5]) gegebene) räumliche Übertragungen bekannter ebener Sätze von Kasner [6]), Cesàro [7]), Scheffers [8]).

I. Der isotrope Raum und seine Hauptgruppe.

1. Man kann einen *isotropen Raum* I_3 sich realisiert denken als Ausschnitt aus einem etwa pseudoeuklidischen R_4. Dessen Fernraum trägt als absolutes Gebilde eine von zwei Scharen reeller oder konjugiert komplexer Erzeugenden überdeckte Fläche zweiter Ordnung Φ_2^2. Jeder *Tangentialraum* dieser Φ_2^2 stellt einen *isotropen Raum* I_3 vor, dessen *absolutes Gebilde* somit aus einem seiner Fernebene Ω angehörenden Paare reeller oder konjugiert komplexer Geraden (e_1, e_2) besteht. Wir wollen bei den folgenden vorzüglich algebraisch-gruppentheoretischen Betrachtungen aus Realitätsgründen den Fall eines durchaus *reellen* absoluten Gebildes (e_1, e_2) voraussetzen und beschreiben in einem kartesischen Achsenkreuz $(1 : x : y : z = x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ die Fernebene (*absolute Ebene*) durch

$$\Omega \equiv x_0 = 0 \tag{1}$$

und das *absolute Geradenpaar* durch

$$e_1 \equiv x_2 = 0, \qquad e_2 \equiv x_1 = 0. \tag{2}$$

---

[4]) S. Lie-F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen **2**, Leipzig 1890, S. 521.

[5]) F. P. Smith, On osculating element-bands associated with loci of surface-elements, Trans. Amer. Math. Soc. **11** (1910), S. 301—324.

[6]) E. Kasner, The group of turns and slides and the geometry of turbines, Amer. Journ. of Math. **33** (1911), S. 193—202, insb. S. 202. — E. Kasner-I. de Cicco, Geometry of turbines, flat fields, and differential equations, Amer. Journ. of Math. **59** (1937), S. 545—563.

[7]) E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie (deutsche Ausgabe von G. Kowalewski), Leipzig 1901, 2. Aufl. 1926, S. 148.

[8]) G. Scheffers, Isogonalkurven, Äquitangentialkurven und komplexe Zahlen, Math. Ann. **60** (1905), S. 491 bis 531, insbes. S. 500.

Sein Schnittpunkt

$$O \equiv (0:0:0:1) \tag{3}$$

heißt der *absolute Punkt* von I_3.

Wir nennen ferner *Geraden*, welche e_1 (e_2) schneiden, *isotrop* von 1. (2.) Art, solche durch O aber *vollisotrop*. *Ebenen* durch O sollen *isotrop*, solche durch e_1 (e_2) *vollisotrop* von 1. (2.) Art heißen.

2. Es gibt nun eine achtgliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_8$ von projektiven Automorphien des absoluten Geradenpaares, welche wir als die *Hauptgruppe* $\mathfrak{G}_8$ des isotropen Raumes I_3 bezeichnen, und deren Transformationen wir seine *Ähnlichkeiten* nennen. Ihre Darstellung ist:

$$\begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 \\ x_2' = a_{20}x_0 \qquad\quad + a_{22}x_2 \\ x_3' = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\,. \end{cases} \tag{4}$$

Die durch die Forderung

$$a_{11} = a_{22} \tag{5}$$

aus $\mathfrak{G}_8$ herausgehobene invariante Untergruppe G_7 nennen wir die *Grenzgruppe der Ähnlichkeiten* von I_3. Bei ihr bleibt jeder in der Fernebene Ω durch den absoluten Punkt O gehende Strahl fest.

Eine weitere invariante Untergruppe $\mathfrak{B}_7$ von $\mathfrak{G}_8$ wird von den *volumstreuen Ähnlichkeiten* gebildet, für welche gilt:

$$a_{11}a_{22}a_{33} = 1\,. \tag{6}$$

Ihr Durchschnitt mit der Grenzgruppe gibt die invariante G_6 der *volumstreuen Ähnlichkeiten der Grenzgruppe*, für welche somit

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{11}a_{22}a_{33} = 1 \tag{7}$$

ist. Die Automorphien, für welche

$$a_{11}a_{22} = 1 \tag{8}$$

ist, bilden die invariante Untergruppe $\mathfrak{B}_7$ von *Bewegungen* des isotropen Raumes. Diese sind also im allgemeinen *nicht volumstreu* und sollen daher schärfer als *modulare Bewegungen* von I_3 bezeichnet werden.

Ihr Durchschnitt mit der Grenzgruppe G_7 gibt für

$$a_{11} = a_{22} = 1 \tag{9}$$

die invariante Untergruppe B_6 der *modularen Bewegungen der Grenzgruppe.*

$$a_{11}a_{22} = 1, \quad a_{33} = 1 \tag{10}$$

liefert die invariante Untergruppe $\mathfrak{B}_6$ der unimodularen d. i. *volumstreuen Bewegungen.*

Deren Durchschnitt mit der Grenzgruppe G_7 ergibt die wichtigste, den folgenden Betrachtungen ausschließlich zugrunde liegende invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_8$, die *Gruppe G_5 der volumstreuen Grenzbewegungen des isotropen Raumes.* Sie sind charakterisiert durch

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1\,. \tag{11}$$

Das umstehende Modell eines Würfels soll mit seinen acht Ecken und den eingezeichneten Kanten und Flächendiagonalen einen wohl ohne weiteres verständlichen Überblick über die *Struktur der Hauptgruppe* $\mathfrak{G}_8$ des isotropen Raumes vermitteln.

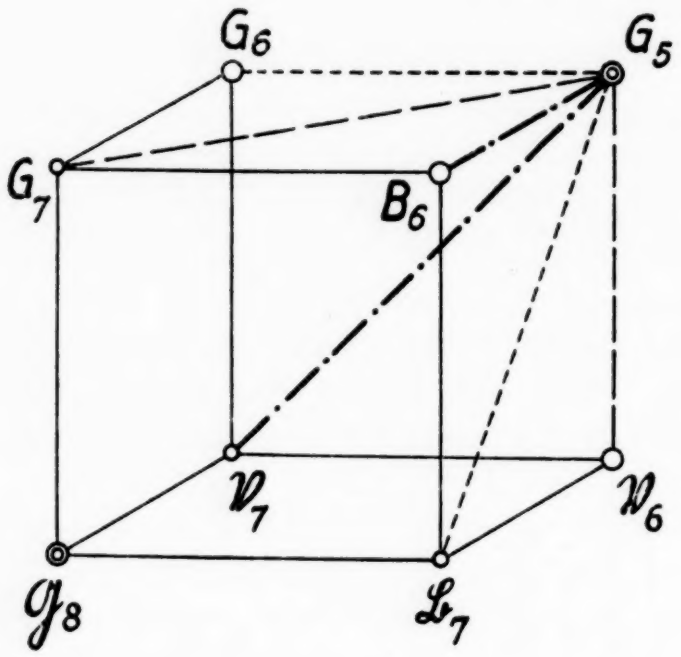

Abb. 1.

II. Die wichtigsten Invarianten der Grenzgruppe G_5.

3. Zwei *eigentliche Punkte* $x, \bar{x}$ allgemeiner Lage haben ein gegen Bewegungen aus $\mathfrak{B}_7$ (also auch aus B_6, $\mathfrak{V}_6$ und G_5) invariantes Entfernungsquadrat

$$(12) \qquad D^2(x\bar{x}) = \left(\frac{x_1}{x_0} - \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}\right)\left(\frac{x_2}{x_0} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0}\right).$$

Sonderfälle. Die Verbindungsgerade $[x\bar{x}]$ ist *isotrop* von

erster Art.	zweiter Art.
Für solche Punkte, die wir *parallel* von erster (zweiter) Art nennen, ist	
$(13_1) \quad \frac{x_2}{x_0} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0} = 0,$	$(13_2) \quad \frac{x_1}{x_0} - \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} = 0,$
und der Ausdruck	
$(14_1) \quad d_1(x\bar{x}) = \frac{x_1}{x_0} - \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}$	$(14_2) \quad d_2(x\bar{x}) = \frac{x_2}{x_0} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0}$

stellt als Invariante gegen B_6 und G_5 die Entfernung dieser parallelen Punkte vor.

Ist schließlich die Gerade $[x\bar{x}]$ *vollisotrop*, d. h. gilt (13_1) und (13_2) zugleich, dann heißen die Punkte x und $\bar{x}$ *vollparallel.* Der Ausdruck

$$(15) \qquad \delta(x\bar{x}) = \frac{x_3}{x_0} - \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_0}$$

stellt dann als Invariante gegen $\mathfrak{V}_6$ und G_5 die Entfernung der beiden vollparallelen Punkte vor.

Zwei eigentliche Punkte des isotropen Raumes haben also erst im Rahmen der Grenzgruppe G_5 von unimodularen Bewegungen stets eine Invariante. Darum soll im folgenden überhaupt *nur* von *Invarianten der Gruppe G_5* die Rede sein. Wir nennen sie in Zukunft auch kurz und schlechthin die *G_5 der Grenzbewegungen* und unterdrücken den Zusatz volumstreu oder unimodular. Ihre Transformationen heißen fortan kurz *Grenzbewegungen.*

Wollte man Ausdrücke so verschiedener Bauart wie $D(x\bar{x})$, $d(x\bar{x})$, $\delta(x\bar{x})$ auch mit verschiedenen Kunstnamen belegen, dann würde die Terminologie recht verwickelt werden. Wir ziehen es daher vor, obwohl das Mißliche eines solchen Entschlusses auf der Hand liegt, die notwendigen Unterscheidungen im konkreten Falle wohl *typographisch*

stets beizubehalten, den Invarianten selbst aber doch die *gleichen Namen* zu geben, jene nämlich, die sie auch im elementaren euklidischen Falle haben. In diesem Sinne sprechen wir stets von der *Entfernung* zweier Punkte (auch wenn sie uneigentlich sind), dem *Winkel* zweier Ebenen oder Geraden (auch wenn sie parallel sind) usw.

4. Für zwei *uneigentliche Punkte* $x, \bar{x}$ $(x_0 = \bar{x}_0 = 0)$ sind die Ausdrücke $x_2 : x_1$ und $\bar{x}_2 : \bar{x}_1$ Invarianten. Also kann man als Entfernung der uneigentlichen Punkte $x, \bar{x}$ erklären:

$$F(x\bar{x}) = \frac{1}{2} \lg \left(\frac{x_2 \bar{x}_1}{x_1 \bar{x}_2} \right). \tag{16}$$

Der Klammerinhalt ist dabei offenbar das Doppelverhältnis, das die Punkte $x, \bar{x}$ mit den Schnittpunkten ihrer Verbindungsgeraden $[x\bar{x}]$ mit den absoluten Geraden e_1, e_2 bestimmen.

Als *wichtigsten Sonderfall* heben wir jenen hervor, wo die Gerade $[x\bar{x}]$ durch den absoluten Punkt O hindurchgeht. Die Klammer in (16) wird dann gleich 1 und $F(x\bar{x}) = 0$. Als Ersatz nehmen wir die Invariante

$$S(x\bar{x}) = \frac{x_3}{\sqrt{x_1 x_2}} - \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{\bar{x}_1 \bar{x}_2}}. \tag{17}$$

Verbindet man die Fernpunkte $x, \bar{x}$ mit einem eigentlichen Punkte y durch eine isotrope Ebene, so ist (17) gerade die aus der Geometrie dieser Ebene her bekannte *Sperrung* der beiden Geraden $[yx], [y\bar{x}]$.

Liegen im besonderen $x, \bar{x}$ auf der absoluten Geraden

$e_1 \quad (x_2 = \bar{x}_2 = 0)$, $\qquad$ $e_2 \quad (x_1 = \bar{x}_1 = 0)$,

so hat man die Invariante

$$\sigma_1(x\bar{x}) = \frac{x_3}{x_1} - \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1}. \tag{18_1}$$

$$\sigma_2(x\bar{x}) = \frac{x_2}{x_1} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1}. \tag{18_2}$$

5. Die *Ebenen* $u, \bar{u}$ *allgemeiner Lage*

$$(u \mid x) \equiv \sum u_i x_i = 0, \qquad (\bar{u} \mid x) = 0$$

haben gegen G_5 die Invariante

$$D^2(u\bar{u}) = \left(\frac{u_1}{u_3} - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_3} \right) \left(\frac{u_2}{u_3} - \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_3} \right), \tag{19}$$

die wir ihr *Winkelquadrat* nennen; wegen $u_3 \neq 0$, $\bar{u}_3 \neq 0$ darf keine der Ebenen isotrop sein.

Trifft im besonderen die Schnittgerade der beiden Ebenen die absolute Gerade

e_1,

$$\text{d. h. } \frac{u_1}{u_3} - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_3} = 0, \tag{20_1}$$

e_2,

$$\text{d. h. } \frac{u_2}{u_3} - \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_3} = 0, \tag{20_2}$$

so dient als Invariante

$$d_1(u\bar{u}) = \frac{u_2}{u_3} - \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_3}. \tag{21_1}$$

$$d_2(u\bar{u}) = \frac{u_1}{u_3} - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_3}. \tag{21_2}$$

Besteht schließlich (20_1) und (20_2) zugleich, sind die Ebenen also *parallel*, ohne aber isotrop zu sein, so haben sie gegen G_5 die Invariante

$$\delta(u\bar{u}) = \frac{u_0}{u_3} - \frac{\bar{u}_0}{\bar{u}_3}. \tag{22}$$

Das ist auch die Invariante $\delta(x\bar{x})$ zweier vollparalleler Punkte x aus u und $\bar{x}$ aus $\bar{u}$.

6. Zwei beliebige *isotrope Ebenen* $u, \bar{u}$ $(u_3 = 0, \bar{u}_3 = 0)$ haben die Invariante

$$F(u, \bar{u}) = \frac{1}{2} \lg \left(\frac{u_1 \bar{u}_2}{u_2 \bar{u}_1} \right), \tag{23}$$

wobei der Klammerinhalt wieder das Doppelverhältnis vorstellt, das die Ebenen $u, \bar{u}$ mit den in ihrem Büschel enthaltenen vollisotropen Ebenen bilden.

Als wichtigsten *Sonderfall* heben wir jenen hervor, wo die isotropen Ebenen $u, \bar{u}$ *parallel* sind, d. h. die Klammer in (23) zu eins wird. Dann wäre $F(u\bar{u}) = 0$. Als Ersatz existiert die Invariante

$$S(u\bar{u}) = \frac{u_0}{\sqrt{u_1 u_2}} - \frac{\bar{u}_0}{\sqrt{\bar{u}_1 \bar{u}_2}}. \tag{24}$$

Sie kann gedeutet werden als der doppelte Abstand der beiden parallelen Spurgeraden der Ebenen auf der Ebene $x_3 = 0$, gemessen mittels der pseudoeuklidischen Metrik, die in dieser Ebene des isotropen Raumes herrscht.

Im besonderen können die beiden parallelen Ebenen auch *vollisotrop* werden von

1. Art $(u_2 = \bar{u}_2 = 0)$. | 2. Art $(u_1 = \bar{u}_1 = 0)$.

Dann existiert die Invariante

$$\sigma_1(u\bar{u}) = \frac{u_0}{u_1} - \frac{\bar{u}_0}{\bar{u}_1}. \tag{25_1}$$

$$\sigma_2(u\bar{u}) = \frac{u_0}{u_2} - \frac{\bar{u}_0}{\bar{u}_2}. \tag{25_2}$$

7. Schon hier tritt deutlich die *Dualität der Metrik des isotropen Raumes* hervor, die sich aus der selbstdualen Struktur des absoluten Gebildes begründet. Tatsächlich führt z. B. das *Polarsystem* der Fläche zweiter Ordnung

$$x_0 x_3 + x_1 x_2 = 0, \tag{26}$$

d. i. die *Korrelation*

$$u_0 = x_3, \quad u_1 = x_2, \quad u_2 = x_1, \quad u_3 = x_0, \tag{27}$$

alle Formeln aus **3**, **4** über in die entsprechenden aus **5**, **6**. Gleiches gilt für die noch folgenden Formelsysteme. Geometrisch bedeutet dies also, daß die Polarität (27) räumliche Figuren dual so vertauscht, daß dabei die Invarianten dualer Gebilde ihre Werte beibehalten.

8. Zwei *Geraden* $p, \bar{p}$ allgemeiner Lage seien festgelegt durch ihre Plückerschen Koordinaten $p_1 = p_{01}, \ldots, p_4 = p_{23}, \ldots, \bar{p}_i$. Sie bestimmen einen *Winkel*, nämlich die nach (16) erklärte Invariante ihrer Fernpunkte:

$$F(p\bar{p}) = \frac{1}{2} \lg \left(\frac{p_2 \bar{p}_1}{p_1 \bar{p}_2} \right). \tag{28}$$

Sie bestimmen auch einen *Abstand*, nämlich die nach (15) erklärte Invariante der beiden auf ihnen vorhandenen vollparallelen Punkte:

$$\delta(p\bar{p}) = \frac{\sum_1^6 p_i \bar{p}_{i+3}}{p_1 \bar{p}_2 - p_2 \bar{p}_1}. \tag{29}$$

Die dualen Definitionen der beiden Invarianten führen natürlich wertgemäß auf dieselben Größen. Man gelangt zu ihnen analytisch sofort mittels der Polarität (27), die im Linienraum lautet:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_1, & \dot{p}_2 = -p_2, & \dot{p}_3 = p_6, \\ \dot{p}_4 = p_4, & \dot{p}_5 = -p_5, & \dot{p}_6 = p_3. \end{cases} \tag{30}$$

Der wichtigste *Sonderfall* ist jener, wo

$$p_1 \bar{p}_2 - p_2 \bar{p}_1 = 0$$

ist. Die Geraden $p, \bar{p}$ sind dann parallel zu einer isotropen Ebene. Invarianten sind nach (17) und (24)

$$(31)\qquad \begin{cases} S(p\bar{p}) = \dfrac{p_3}{\sqrt{p_1 p_2}} - \dfrac{\bar{p}_3}{\sqrt{\bar{p}_1 \bar{p}_2}}, \\ S'(p\bar{p}) = \dfrac{p_6}{\sqrt{-p_1 p_2}} - \dfrac{p_6}{\sqrt{-\bar{p}_1 \bar{p}_2}}. \end{cases}$$

Diese vertauschen sich vermöge (30), sind also, was auch geometrisch klar ist, zu einander dual.

Schneiden weiter die Geraden $p, \bar{p}$ zugleich die absoluten Geraden

$$e_1 \quad (p_2 = \bar{p}_2 = 0), \qquad\qquad e_2 \quad (p_1 = \bar{p}_1 = 0),$$

so hat man nach (18) und (25) die Invarianten

$$(32_1)\quad \begin{cases} \sigma_1(p\bar{p}) = \dfrac{p_3}{p_1} - \dfrac{\bar{p}_3}{\bar{p}_1} \\ \sigma_1'(p\bar{p}) = \dfrac{p_6}{p_1} - \dfrac{\bar{p}_6}{\bar{p}_1}. \end{cases} \qquad (32_2)\quad \begin{cases} \sigma_2(p\bar{p}) = \dfrac{p_3}{p_2} - \dfrac{\bar{p}_3}{\bar{p}_2} \\ \sigma_2'(p\bar{p}) = \dfrac{p_6}{p_2} - \dfrac{\bar{p}_6}{\bar{p}_2}. \end{cases}$$

9. Ein eigentlicher *Punkt* x und eine nichtisotrope *Ebene* u besitzen die Invariante

$$(33)\qquad \delta(xu) = \frac{u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3}{x_0 u_3},$$

nämlich die nach (15) zu berechnende Entfernung des Punktes x von jenem Punkte $\bar{x}$ in u, der zu ihm vollparallel ist (oder dual!).

Die Invariante einer *Geraden* p und einer *Ebene* u hängt ab vom Fernpunkt $(0, p_1, p_2, p_3)$ der Geraden und der Stellung der Ebene. Man findet nach Formel (17)

$$(34)\qquad S(pu) = \frac{u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3}{u_3 \sqrt{p_1 p_2}}.$$

Auf mögliche Sonderfälle sei nur hingewiesen.

Dual hat man sofort die Invariante eines *Punktes* x und einer *Geraden* p, die, allgemeine Lage vorausgesetzt, so lautet:

$$(35)\qquad S(px) = \frac{x_0 p_6 - x_1 p_2 + x_2 p_1}{x_0 \sqrt{-p_1 p_2}}.$$

Auf Sonderfälle sei auch hier verzichtet.

III. Die Gruppe G_5 der Grenzbewegungen. Untergruppen und Anwendungen.

10. Die Grenzgruppe G_5 läßt zwei wichtige Zerspaltungen in Paare reziproker, einfach-transitiver Gruppen zu, die, wie ich an anderer Stelle [1]) zu zeigen Gelegenheit hatte, das Fundament der beiden bekannten Lieschen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes vorstellen und eng mit der neueren Kinematik der isotropen Ebene zusammenhängen.

Es sei nämlich

$$(36)\qquad G_5 \quad \begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = c_1 x_0 + x_1 \\ x_2' = c_2 x_0 \qquad + x_2 \\ x_3' = c_3 x_0 + c_4 x_1 + c_5 x_2 + x_3 \end{cases}$$

die Gruppe G_5 der (unimodularen) Grenzbewegungen. Ihr Liescher Gruppenkeim hat das Symbol

$$(37)\qquad \boxed{V_1 \equiv x_0 f_1, \quad V_2 \equiv x_0 f_2, \quad V_3 \equiv x_0 f_3, \quad V_4 \equiv x_1 f_3, \quad V_5 \equiv x_2 f_3.}$$

Dann ist G_5 *erstens* das (kommutative) Produkt der beiden reziproken einfach-transitiven Gruppen

$$(38^r) \qquad D_3^r \quad \begin{cases} x_0' = x_0\alpha_0 \\ x_1' = x_0\alpha_1 + x_1\alpha_0 \\ x_2' = x_0\alpha_2 \qquad\quad + x_2\alpha_0 \\ x_3' = x_0\alpha_3 + x_1\alpha_2 \qquad\quad + x_3\alpha_0\,, \end{cases}$$

$$(38^l) \qquad D_3^l \quad \begin{cases} x_0' = \beta_0 x_0 \\ x_1' = \beta_1 x_0 + \beta_0 x_1 \\ x_2' = \beta_2 x_0 \qquad\quad + \beta_0 x_2 \\ x_3' = \beta_3 x_0 \qquad\quad + \beta_1 x_2 + \beta_0 x_3. \end{cases}$$

Diese bezeichnen wir als Gruppe D_3^r der *Rechtsdrehungen* bzw. D_3^l der *Linksdrehungen* des isotropen Raumes I_3. Die Behauptung:

$$G_5 = D_3^r \cdot D_3^l = D_3^l \cdot D_3^r$$

bestätigt man am schnellsten an Hand der Lieschen Symbole dieser Gruppen; diese sind

$$(39^r) \qquad D^r: \quad \boxed{R_1 \equiv x_0 f_1, \quad R_2 \equiv x_0 f_2 + x_1 f_3, \quad R_3 \equiv x_0 f_3,}$$

$$(39^l) \qquad D^l: \quad \boxed{L_1 \equiv x_0 f_1 + x_2 f_3, \quad L_2 \equiv x_0 f_2, \quad L_3 \equiv x_0 f_3.}$$

Wegen $R_3 \equiv L_3$ durchdringen sich die beiden dreigliedrigen Gruppen nach der, für beide invarianten, gemeinsamen eingliedrigen Untergruppe der *vollisotropen Schiebungen* (vom absoluten Zielpunkt O), weshalb ihr Produkt tatsächlich nur die fünfgliedrige Grenzgruppe G_5 wird.

Der einfachste analytische Apparat zur Beschreibung dieser Gruppen ist ein *System hyperkomplexer Zahlen* der Form

$$x = \sum_0^3 x_i e_i, \qquad \alpha = \sum_0^3 \alpha_i e_i, \qquad \beta = \sum_0^3 \beta_i e_i \ldots,$$

deren Einheiten e_i der *Produkttafel*

(40)

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	e_2	0	0	0
e_3	e_3	0	0	0

genügen. Mit seiner Hilfe hat man diese Darstellungen:

$$(41) \qquad \begin{cases} D_3^r: & x' = x\alpha, \\ D_3^l: & x' = \beta x, \\ G_5: & x' = \beta x \alpha. \end{cases}$$

11. *Zweitens* noch ist G_5 das Produkt der beiden reziproken einfach-transitiven Gruppen

$$(42^r) \qquad S_3^r \quad \begin{cases} x_0' = x_0\alpha_0 \\ x_1' = x_0\alpha_1 + x_1\alpha_0 \\ x_2' = x_0\alpha_2 \qquad\quad + x_2\alpha_0 \\ x_3' = x_0\alpha_3 + x_1\alpha_2 - x_2\alpha_1 + x_3\alpha_0 \end{cases}$$

$$(42^l) \qquad S_3^l \quad \begin{cases} x_0' = \beta_0 x_0 \\ x_1' = \beta_1 x_0 + \beta_0 x_1 \\ x_2' = \beta_2 x_0 \qquad\quad + \beta_0 x_2 \\ x_3' = \beta_3 x_0 - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2 + \beta_0 x_3 . \end{cases}$$

Diese bezeichnen wir als Gruppe S_3^r der *Rechtsschiebungen* bzw. S_3^l der *Linksschiebungen* des isotropen Raumes I_3. Wieder bestätigt man die Behauptung

$$G_5 = S_3^r \cdot S_3^l = S_3^l \cdot S_3^r$$

am leichstesten an Hand der *Lieschen* Symbole der Gruppen, welche sind

$$(43^r) \qquad S_3^r: \quad \boxed{\boldsymbol{R}_1 \equiv x_0 f_1 - x_2 f_3, \quad \boldsymbol{R}_2 \equiv x_0 f_2 + x_1 f_3, \quad \boldsymbol{R}_3 \equiv x_0 f_3 .}$$

$$(43^l) \qquad S_3^l: \quad \boxed{\boldsymbol{L}_1 \equiv x_0 f_1 + x_2 f_3, \quad \boldsymbol{L}_2 \equiv x_0 f_2 - x_1 f_3, \quad \boldsymbol{L}_3 \equiv x_0 f_3 .}$$

Auch die beiden Schiebungsgruppen durchdringen einander nach der invarianten eingliedrigen Untergruppe der vollisotropen Schiebungen $\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{L}_3$. Der einfachste analytische Apparat zur adäquaten Beschreibung der Schiebungsgruppen ist wieder ein *System hyperkomplexer Zahlen* der Form $x \equiv \sum_0^3 x_i e_i$ usw., deren Einheiten e_i der *Produkttafel*

(44)

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	e_2	$-e_3$	0	0
e_3	e_3	0	0	0

genügen. Mit seiner Hilfe hat man diese eleganten Darstellungen

$$(45) \qquad \begin{cases} S_3^r: & x' = x\alpha , \\ S_3^l: & x' = \beta x , \\ G_5: & x' = \beta x \alpha . \end{cases}$$

12. Die Bahnkurven eingliedriger kontinuierlicher Untergruppen von D_3^r und D_3^l sind im allgemeinen *parabolische Kreise* des isotropen Raumes I_3, d. h. Kegelschnitte (Parabeln), die die absolute Ebene Ω im absoluten Punkte O berühren. Aus dieser Tatsache erklärt sich der Name *Drehungen* für diese Bewegungsarten.

Die Bahnkurven eingliedriger kontinuierlicher Untergruppen von S_3^r und S_3^l sind dagegen, wie gleich gezeigt werden soll, *gerade Linien*, weshalb diese Transformationen *Schiebungen* genannt wurden. Man stellt leicht fest, daß bei Schiebungen die Punkte des Raumes um konstante Entfernungen verschoben, die Ebenen um konstante Winkel gedreht werden.

13. Wegen der Existenz der beiden Schiebungsgruppen läßt sich die Geometrie des isotropen Raumes auffassen als ein *Grenzfall* jener *des elliptischen Raumes*. Der *quasielliptische Raum* W. Blaschkes [9]) bildet dabei das Übergangsglied. Auch der Begriff des Cliffordschen *Parallelismus* hat sein Analogon.

Eine *Gerade* g, festgelegt durch ihre beiden Punkte $x(x_i)$, $x'(x_i')$ oder ihre *Plückerschen* Koordinaten $p_{ik} = x_i x_k' - x_k x_i'$, kann *Bahnkurve* je einer wohlbestimmten eingliedrigen kontinuierlichen Gruppe von Rechtsschiebungen (α) oder Linksschiebungen (β) sein.

---

[9]) W. Blaschke, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie I. II, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **60** (1911), S. 61—81.

Zunächst lautet die Schiebung, welche x nach x' bringt,

$$x' = x\alpha, \quad x' = \beta x, \tag{46}$$

woraus folgt

$$\alpha = x^{-1}x', \quad \beta = x'x^{-1}, \tag{47}$$

wobei $x^{-1} = x_0e_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3$ ist. Explizite ist

$$\begin{cases} \alpha = x_0x_0'e_0 + p_{01}e_1 + p_{02}e_2 + (p_{03} - p_{12})e_3, \\ \beta = x_0x_0'e_0 + p_{01}e_1 + p_{02}e_2 + (p_{03} + p_{12})e_3. \end{cases} \tag{48}$$

Durchläuft x' die Gerade g, so ändern sich die p_{ik} nicht, wohl aber x_0x_0'; d. h., unter t einen Parameter verstanden, die Größen

$$\begin{cases} \alpha = te_0 + p_{01}e_1 + p_{02}e_2 + (p_{03} - p_{12})e_3 = \sum_0^3 \alpha_i e_i, \\ \beta = te_0 + p_{01}e_1 + p_{02}e_2 + (p_{03} + p_{12})e_3 = \sum_0^3 \beta_i e_i \end{cases} \tag{49}$$

charakterisieren die *eingliedrigen Gruppen* von Rechts- und Linksschiebungen.

Bei ihnen beschreiben also die Raumpunkte Geraden aus parabolischen Netzen, die wir *Rechtsnetze* und *Linksnetze* nennen. Man hat die Darstellungen

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} - p_{12} \end{Vmatrix} = 0 \quad \text{Rechtsnetze,} \tag{50^r}$$

$$\begin{Vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} + p_{12} \end{Vmatrix} = 0 \quad \text{Linksnetze.} \tag{50^l}$$

Die Leitgeraden dieser Netze liegen in der absoluten Ebene Ω und bilden dort das Büschel um den absoluten Punkt. In dieses, als doppelt überdeckt aufzufassende Strahlbüschel sind also im Grenzfall des isotropen Raumes die beiden Regelscharen der Maßfläche des elliptischen Raumes degeneriert.

Wir nennen nun, den Begriff des *Cliffordschen Parallelismus* auf den isotropen Raum übertragend, irgend zwei *Geraden eines festen Rechtsnetzes zueinander rechtsparallel* und irgend zwei *Geraden eines Linksnetzes linksparallel.*

14. Durch jeden Raumpunkt x gibt es zu einer Geraden g stets eindeutig eine rechtsparallele g^r und eine linksparallele g^l. Diese *Abbildung der Raumgeraden g auf die Geradenpaare (g^r, g^l) eines Bündels x*, für den elliptischen [10]) und quasielliptischen [9]) Raum wohlbekannt, gehört zu den sogenannten *linearen Abbildungen der darstellenden Geometrie* (deren allgemeinen Typus L. Eckhart [11]) angegeben hat). Sie ist freilich im Falle des isotropen Raumes von *singulärem Charakter* insofern, als die Bildgeraden (g^r, g^l) nicht unabhängig voneinander gewählt werden dürfen, die Umkehrung der Abbildung also unendlich-vieldeutig ist.

Wir wählen als *Scheitel des Bündels der Bildgeraden g^r, g^l* den *Ursprung*

$$O_0 = (1:0:0:0).$$

Die Raumgerade g bestimmt dann die Schiebungen vom Parametersystem α bzw. β aus Formel (49). Bei diesen Schiebungen gelangt der Punkt O_0 in die Punkte G^r und G^l der Bildgeraden g^r, g^l, wobei

$$\begin{cases} G^r \equiv (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3) = (x_0x_0' : p_{01} : p_{02} : p_{03} - p_{12}) \\ G^l \equiv (\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3) = (x_0x_0' : p_{01} : p_{02} : p_{03} + p_{12}). \end{cases} \tag{51}$$

---

[10]) E. Study, Über nichteuklidische und Liniengeometrie II (Liniengeometrie im elliptischen Raume), Jahresber. Dtsch. Math. Ver. **11** (1902), S. 318—324.

[11]) L. Eckhart, Über die Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie, Sitz.-Ber. Akad. d. Wiss. Wien, Math. phys. Klasse, **132** (1923), S. 187.

Die „rechte" und „linke" Bildgerade g^r und g^l von g liegen also stets in einer und derselben isotropen Ebene.

Geraden, welche die x_3-Achse schneiden ($p_{12} = 0$), haben zusammenfallende Bildgeraden.

15. An Hand der hyperkomplexen Darstellung (45) der beiden Schiebungsgruppen kann man, wie ich schon früher gezeigt habe [1]), auch leicht die einfachen Gesetze herleiten, welche das Verhalten der beiden Bilder einer Geraden bei einer auf diese wirkenden Rechts- oder Linksschiebung formulieren.

Üben wir etwa auf eine Gerade $g = [xx']$ eine Rechtsschiebung μ aus, so werden aus ihren Punkten x und x' zwei neue Punkte

$$\dot{x} = x\mu, \quad \dot{x}' = x'\mu,$$

und die aus g entstehende Gerade $\dot{g} = [\dot{x}\dot{x}']$ hat Bildgeraden $(\dot{g}^r, \dot{g}^l)$, bestimmt durch die Punkte $\dot{G}^r \equiv \dot{\alpha}$, $\dot{G}^l \equiv \dot{\beta}$, wobei nach (47)

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{x}^{-1}\dot{x}' & \dot{\beta} &= \dot{x}'\dot{x}^{-1} \\ &= (x\mu)^{-1}x'\mu & &= x'\mu(x\mu)^{-1} \\ &= \mu^{-1}x^{-1}x'\mu & &= x'\mu\mu^{-1}x^{-1} \\ &= \mu^{-1}\alpha\mu, & &= x'x^{-1} \\ & & &= \beta. \end{aligned}$$

Nun stellt die Gruppe

$$\dot{y} = \mu^{-1}y\mu \tag{52}$$

offenbar diejenigen in G_5 enthaltenen Transformationen vor, welche den Ursprung festlassen, d. h. die G_2 *der Drehungen des Ursprungsbündels*, so daß wir den Satz haben:

Bei einer Rechtsschiebung μ erleidet das rechte Bild g^r einer Geraden g eine Bündeldrehung, das linke g^l bleibt in Ruhe.

Umgekehrtes gilt für eine Linksschiebung ν. Dann wird, wie man ebenso zeigt,

$$\dot{\alpha} = \alpha, \quad \dot{\beta} = \nu\beta\nu^{-1}.$$

Bei einer Linksschiebung ν erleidet das linke Bild g^l einer Geraden g eine Bündeldrehung, das rechte g^r bleibt in Ruhe.

Durch unsere Abbildung des isotropen Linienraumes werden die Bewegungen

$$x' = \nu x \mu \tag{53}$$

in isomorpher Weise übertragen auf die simultanen Drehungen der beiden Bildbündel $g^r \sim \alpha$, $g^l \sim \beta$:

$$\dot{\alpha} = \mu^{-1}\alpha\mu, \quad \dot{\beta} = \nu\beta\nu^{-1}. \tag{54}$$

Diese Isomorphie der G_5 der Grenzbewegungen mit der doppeltgesetzten G_2 der Bündeldrehungen kann natürlich keine holoedrische sein. Es liegt dies in der Singularität unserer Abbildung, die sich am treffendsten in folgendem *Theorem* äußert:

Geraden $g, \dot{g}$, die durch vollisotrope Schiebungen auseinander entstehen, haben identische linke und rechte Bilder $g^l = \dot{g}^l$, $g^r = \dot{g}^r$.

Dies beruht darin, daß eine vollisotrope Schiebung zugleich als Rechts- wie als Linksschiebung des isotropen Raumes I_3 aufgefaßt werden kann.

Die Abbildung durch Links- und Rechtsparallelismen ist somit *unempfindlich* gegen vollisotrope Schiebungen.

16. Durchläuft der linke Bildstrahl g^l eine *Ebene*

$$\lambda \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \tag{55}$$

so beschreibt, wie man den Formeln (50^l) entnimmt, die Raumgerade g einen *linearen Strahlkomplex*

$$u_1 p_{01} + u_2 p_{02} + u_3 (p_{03} + p_{12}) = 0, \tag{56}$$

den wir ein *Linksgewinde* nennen.

Wird umgekehrt der rechte Bildstrahl g^r an die Ebene

$$\varrho \equiv v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 \tag{57}$$

gebunden, so durchläuft die Raumgerade nach (50^r) das *Rechtsgewinde*

$$v_1 p_{01} + v_2 p_{02} + v_3 (p_{03} - p_{12}) = 0. \tag{58}$$

Das Bündel der Linksgewinde ist zu jenem der Rechtsgewinde *involutorisch.*

Offenbar gestatten die Linksgewinde sämtliche Rechtsschiebungen, werden aber durch Linksschiebungen untereinander vertauscht. Umgekehrtes gilt für Rechtsgewinde. Daraus schließt man leicht auf das *Bild* der Polarität dieser Gewinde: Hinsichtlich eines Linksgewindes (56) polare Geraden $g, \bar{g}$ haben identische rechte Bildgeraden $g^r = \bar{g}^r$. Ihre linken Bilder $g^l, \bar{g}^l$ aber entsprechen einander in der Spiegelung an der Bildebene (55) des Linksgewindes, bei welcher die Symmetriestrahlen vollisotrop sind. Analoges gilt für Rechtsgewinde.

Das Paar der Spiegelungen (in vollisotroper Richtung) des linken Bildbündels an der Ebene λ (55) und des rechten Bildbündels an der Ebene ϱ (57) ist danach das Abbild jener *windschiefen Involution* des isotropen Raumes, welche sich als Produkt der Nullsysteme der Gewinde (56) und (58) ergibt.

17. Es sei hier erwähnt, daß es eine Schar von ∞^8 *Korrelationen* gibt, welche das absolute Gebilde des isotropen Raumes I_3 in sich überführen. Darunter existieren ∞^3 *Nullsysteme*

$$\alpha_{01} p_{01} + \alpha_{02} p_{02} + \alpha_{03} p_{03} + \alpha_{12} p_{12} = 0 \tag{59}$$

und ∞^4 *Polaritäten* mit den Inzidenzparaboloiden

$$\alpha_{00} x_0^2 + 2\alpha_{01} x_0 x_1 + 2\alpha_{02} x_0 x_2 + 2\alpha_{03} x_0 x_3 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 = 0. \tag{60}$$

Man stellt leicht fest, daß jedes der allgemeinen Nullsysteme (59) eine zweigliedrige Gruppe von Grenzbewegungen aus G_5 (36) gestattet, daß jedoch, von den vollisotropen Schiebungen natürlich abgesehen, nur die *Rechts-* und *Linksgewinde*, für welche $\alpha_{03} = \mp \alpha_{12}$ gilt, reguläre Schiebungen gestatten, nämlich, wie erwähnt, sogar dreigliedrige Schiebungsgruppen. Dadurch sind sie also charakterisierbar.

Auch jede *Polarität* (60) gestattet eine G_2 von Grenzbewegungen aus G_5, im allgemeinen aber keine Schiebungen. Nur wenn $\alpha_{12} = \pm \alpha_{03}$ ist, gestattet (60) eine G_1 von Linksschiebungen und eine G_1 von Rechtsschiebungen, die in kommutativer Weise ihre automorphe G_2 erzeugen. Wir nennen diese Polaritäten *ausgezeichnet.* Ein solche ist schon im II. Kapitel (26) zum Nachweis der Dualität der metrischen Formeln herangezogen worden.

IV. Die neuere Kinematik des isotropen Raumes.

Die erste Liesche Abbildung der Flächenelemente des R_3 auf Punkte des R_5.

18. Die Gruppe G_5 der (unimodularen) Grenzbewegungen des isotropen Raumes I_3 lautet nach einmaliger Erweiterung zufolge (36), wenn $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ bedeutet,

$$\begin{cases} x' = c_1 + x \\ y' = c_2 \qquad + y \\ z' = c_3 + c_4 x + c_5 y + z \\ p' = c_4 \qquad\qquad + p \\ q' = c_5 \qquad\qquad\quad + q\,. \end{cases} \tag{61}$$

Sie transformiert mithin die regulären Flächenelemente (x, y, z, p, q), d. h. jene mit endlichen Koordinaten, in *einfach-transitiver* Weise.

Wir schreiben diese Gruppe (61) zunächst mittels homogener Variablen und Parameter

$$(62)\qquad \begin{cases} 1 : x : y : z : p : q = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 \\ 1 : c_1 : c_2 : c_3 : c_4 : c_5 = a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 \end{cases}$$

und nennen sie von nun an G_5^r:

$$(63)\qquad G_5^r \quad \begin{cases} x_0' = x_0 a_0 \\ x_1' = x_0 a_1 + x_1 a_0 \\ x_2' = x_0 a_2 + x_2 a_0 \\ x_3' = x_0 a_3 + x_1 a_4 + x_2 a_5 + x_3 a_0 \\ x_4' = x_0 a_4 + x_4 a_0 \\ x_5' = x_0 a_5 + x_5 a_0. \end{cases}$$

Unter Benutzung des *Systems hyperkomplexer Zahlen*

$$(64)\qquad x = \sum_0^5 x_i e_i, \qquad a = \sum_0^5 a_i e_i,$$

für dessen Einheiten e_i die Produkttafel

$$(65)\qquad \begin{array}{c|cccccc} & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline e_0 & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ e_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 & e_3 & 0 \\ e_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ e_3 & e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_4 & e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_5 & e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

gilt, läßt sich die Bewegungsgruppe G_5^r einfach so schreiben:

$$(66)\qquad x' = xa.$$

Dabei ist, wie im folgenden stets, die Zahl x dem Flächenelemente (x_i), die Zahl a der Bewegung vom Parametersystem (a_i) zugeordnet. Die Zusammensetzung zweier Grenzbewegungen a, a' zu einer neuen, resultierenden a'' erfolgt nach der Regel

$$(67)\qquad a'' = aa'.$$

Die zu x reziproke Zahl x^{-1}, jene, für welche $xx^{-1} = x^{-1}x = e_0$, d. i. die Haupteinheit des Zahlensystems ergibt, ist

$$x^{-1} = \frac{1}{x_0^3}\{x_0^2 e_0 - x_0 x_1 e_1 - x_0 x_2 e_2 - (x_0 x_3 - x_1 x_4 - x_2 x_5)\, e_3 - x_0 x_4 e_4 - x_0 x_5 e_5\}.$$

19. In der einfachen Transitivität der Gruppe G_5^r liegt ihre Bedeutung für die Geometrie der Flächenelemente und ist umgekehrt auch die Bedeutung dieser für G_5^r begründet. Da nämlich die gegenseitige Lage zweier regulärer Flächenelemente x, x' eindeutig jene Grenzbewegung $a = x^{-1}x'$ festlegt, welche x in x' überführt, kann man nach Auszeichnung eines festen *Grundelementes* x, etwa von $x = e_0$, jedes weitere Element $x' \doteq a$ als *Repräsentanten* der Grenzbewegung $x \to x'$ auffassen. Die *regulären Flächenelemente* können mithin auch zur Bestimmung der *Lagemöglichkeiten* des isotropen Raumes I_3 oder, mit einem neueren Ausdruck, seiner *Somen* hinsichtlich G_5^r dienen, und diese *kinematische, nicht ihre projektive Auffassung liegt den folgenden Überlegungen zugrunde.*

Durch die topologische Verschiedenheit des Kontinuums der Somen des isotropen Raumes und jenes der Flächenelemente des projektiven Raumes begründen sich die Durchbrechungen, die die Eindeutigkeit der gegenseitigen Zuordnung der beiden Kontinuen für Flächenelemente und Somen isotroper Stellung oder für uneigentliche Elemente und Somen erleidet. Auf sie bin ich im wesentlichen schon an anderer Stelle [2]) ausführlicher eingegangen.

Um die Kinematik der Grenzgruppe G_5^r des isotropen Raumes I_3 in neuerem (Studyschen) Sinne [12]) zu entwickeln, muß man nur noch die bisher ausgezeichnete Stellung des Grundelementes e_0 tilgen und *jedem* Flächenelemente b die Fähigkeit zuerkennen, Grundelement zu sein. Nun wird b durch die Bewegung x in das Element $x' = bx$ transformiert, das also ebenso wie vorhin das Element x imstande ist, die Bewegung x zu repräsentieren.

Neben die Gruppe G_5^r tritt also die dazu *reziproke*, einfach transitive Gruppe G_5^l

$$x' = bx, \tag{68}$$

d. i. ausführlich geschrieben:

$$G_5^l \quad \begin{cases} x_0' = b_0 x_0 \\ x_1' = b_1 x_0 + b_0 x_1 \\ x_2' = b_2 x_0 + b_0 x_2 \\ x_3' = b_3 x_0 + b_0 x_3 + b_1 x_4 + b_2 x_5 \\ x_4' = b_4 x_0 + b_0 x_4 \\ x_5' = b_5 x_0 + b_0 x_5. \end{cases} \tag{69}$$

Die Produktregel für diese Gruppe ist

$$b'' = b'b. \tag{70}$$

Irgend zwei Systeme von Elementen, d. s. Somen (x), (x'), die vermöge einer Transformation von G_5^l zusammenhängen, sind also in gleicher Weise geeignet, ein und dasselbe System von Grenzbewegungen aus G_5^r zu repräsentieren. Es sind nämlich diese Elementsysteme (x) und (x') durch ebendieselben Grenzbewegungen das eine Mal aus dem alten Grundelement e_0, das andere Mal aus dem neuen Element b hervorgegangen.

Die beiden kommutativen Gruppen G_5^r, G_5^l durchdringen einander in der invarianten gemeinsamen Untergruppe der Schiebungen vollisotroper Richtung, die sich für

$$a = a_0 e_0 + a_3 e_3, \quad b = b_0 e_0 + b_3 e_3 \tag{71}$$

ergeben. Dies sind also die einzigen in G_5^l enthaltenen Grenzbewegungen. Es wird also richtig aufgefaßt werden, wenn wir im folgenden die Transformationen von G_5^r und G_5^l fortan auch als *Rechtsbewegungen* und *Linksbewegungen* des isotropen Raumes bezeichnen.

Diese beiden Gruppen erzeugen offenbar eine bloß neungliedrige kontinuierliche gemeinsame *Übergruppe* G_9 der Darstellung

$$x' = bxa. \tag{72}$$

Die Gruppe G_9 ist es, welche nach unseren Überlegungen, die den Intentionen der Studyschen neueren Kinematik folgen, den sogenannten *natürlichen Äquivalenzbegriff* der Kinematik des isotropen Raumes trägt. Unter Kinematik ist dabei, wie schon immer, jene zu verstehen, welche aus der Gruppe G_5 der volumstreuen Grenzbewegungen (36) hergeleitet werden kann.

---

[12]) E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903; Anhang: Grundzüge einer neuen Methode der Kinematik, S. 555 ff.

Die Gruppe jener Transformationen aus G_9, welche ein festes Element, etwa e_0 in Ruhe lassen, ist bloß viergliedrig. Man findet für diese G_4 die Darstellung

$$x' = a^{-1} x a. \tag{73}$$

20. Die Grenzgruppe G_5^r liefert auch, wie ich an der erwähnten Stelle [2]) gezeigt habe, die gruppentheoretische Basis für die von S. Lie stammende erste Deutung der Flächenelemente (x, y, z, p, q) des (als isotrop zu denkenden) R_3 als Punkte

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = 1 : x : y : z : p : q \tag{74}$$

des R_5. Bei Auffassung nämlich der Flächenelemente x als Somen des isotropen Raumes I_3 hinsichtlich G_5^r wird der Bildraum R_5 dieser *ersten Lieschen Abbildung* einfach zum *Parameterraum* der Grenzbewegungen x. Die Gruppen G_5^r und G_5^l übertragen sich dabei auf *projektive Gruppen* D_5^r und D_5^l des R_5, nämlich auf die sogenannten *Parametergruppen* von G_5^r (oder G_5^l), und ihr Produkt wird eine projektive Gruppe $\boldsymbol{G_9}$. Die analytische Darstellung dieser Gruppen ist

$$\begin{cases} D_5^r: & x' = xa, \\ D_5^l: & x' = bx, \\ \boldsymbol{G_9}: & x' = bxa, \end{cases} \tag{75}$$

wobei die x_i in $x = \sum_0^5 x_i e_i$ jetzt homogene Punktkoordinaten des R_5 bedeuten.

Die Lieschen Keime dieser projektiven Gruppen sind (bei inhomogener Schreibung: $x_0 = 1$)

$$\begin{aligned} D_5^r&: \quad \boxed{f_1, f_2, f_3, \quad x_1 f_3 + f_4, \quad x_2 f_3 + f_5} \\ D_5^l&: \quad \boxed{f_1 + x_4 f_3, \quad f_2 + x_5 f_3, \quad f_3, f_4, f_5} \\ \boldsymbol{G_9}&: \quad \boxed{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \quad x_1 f_3, x_2 f_3, x_4 f_5, x_3 f_3.} \end{aligned} \tag{76}$$

21. Die Gruppe $\boldsymbol{G_9}$ des R_5 hat, wie man sofort aus ihren Symbolen entnehmen kann, die folgende explizite Gestalt:

$$\boldsymbol{G_9}: \begin{cases} x_0' = c_0 x_0 \\ x_1' = c_1 x_0 + c_0 x_1 \\ x_2' = c_2 x_0 \qquad\quad + c_0 x_2 \\ x_3' = c_3 x_0 + c_6 x_1 + c_7 x_2 + c_0 x_3 + c_8 x_4 + c_9 x_5 \\ x_4' = c_4 x_0 \qquad\qquad\qquad\quad + c_0 x_4 \\ x_5' = c_5 x_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + c_0 x_5. \end{cases} \tag{77}$$

Sie läßt sich in einfacher Weise wieder als eine *Bewegungsgruppe* deuten. Fassen wir nämlich auch den R_5 als einen *isotropen Raum* I_5 auf, dessen Metrik reguliert wird durch den in seinem Fernraum $x_0 = 0$ liegenden *Maßkegel zweiter Ordnung* Γ_3^2

$$x_0 = 0, \quad x_1 x_4 + x_2 x_5 = 0, \tag{78}$$

so enthält die Bewegungsgruppe dieses I_5 als eine invariante Untergruppe eben unsere $\boldsymbol{G_9}$, die wir zweckmäßig wieder als die *Gruppe der* (volumstreuen) *Grenzbewegungen des* I_5 bezeichnen können.

Auch die in $\boldsymbol{G_9}$ enthaltenen (invarianten) Untergruppen D_5^r und D_5^l stellen dann gewisse elementare Grenzbewegungen vor, die wir wieder als *Rechtsdrehungen* und *Linksdrehungen* des isotropen I_5 deswegen bezeichnen können, weil als Bahnkurven ihrer ein-

gliedrigen kontinuierlichen Untergruppen im Sinne der Geometrie von I_5 sich im allgemeinen parabolische Kreise ergeben.

Ihr Durchschnitt ist die Gruppe D_1 der *Translationen in vollisotroper Richtung* (Symbol $\boxed{f_3}$), deren Zielpunkt nämlich der Scheitel $O_3(0:0:0:1:0:0)$ des Maßkegels Γ_3^2 von I_5 ist. Jede Grenzbewegung läßt sich (auf ∞^1 Arten) darstellen als das kommutative Produkt einer Links- und einer Rechtsdrehung. Wir werden bald eine ebenso wichtige zweite Art der Zerspaltung dieser Grenzbewegungen kennen lernen.

Als im Sinne der Kinematik der Grenzgruppe G_5' des isotropen Raumes I_3 *natürlich äquivalente Systeme von Flächenelementen* (*d. s. Somen*) können jetzt solche bezeichnet werden, welche vermöge der ersten Lieschen Abbildung auf den I_5 dort Punktfiguren ergeben, die hinsichtlich der Grenzgruppe G_9 dieses Raumes bewegungskongruent sind.

22. Wie auf Grund der entwickelten gruppentheoretischen Gedanken die *Singularitäten* der ersten Lieschen Abbildung (74) behoben werden können, habe ich früher [2]) gezeigt. Es ist zu diesem Zwecke der isotrope Raum I_5 in *konformer Weise* abzuschließen, wodurch er den *Zusammenhang einer einfach-singulären fünffach ausgedehnten Hyperfläche zweiter Ordnung im R_6, eines Kegels Γ_5^2* mit reellen Linearräumen bekommt. Auf diesen Kegel lassen sich dann die als Somen aufzufassenden Flächenelemente des I_3 sowohl wie der konform-isotrope I_5 in lückenlos umkehrbar eindeutiger und stetiger Weise beziehen. Er stellt ein Studysches natürliches Kontinuum für die Grenzgruppe G_9 von I_5 und die Gruppe G_9 der Kinematik des I_3 dar.

V. Kanonische Darstellung.

Die zweite Liesche Abbildung der Flächenelemente des R_3 auf Punkte des R_5.

23. S. Lie hat neben seine vorhin besprochene erste Abbildung (74) noch eine zweite Abbildung der Flächenelemente des R_3 auf die Punkte des R_5 gestellt [13]), der dadurch besonderes Interesse zukommt, daß sich bei ihr Elementvereine (Streifen, Flächen und deren Ausartungen) übertragen auf Kurven und Flächen des R_5, die einem linearen Komplex angehören.

Im Gegensatz zu Lie, bei dem diese zweite Abbildung mit der ersten in keinerlei zwangläufigem Zusammenhang steht und bei dem die zweite durch eine Art Kunstgriff aus der ersten hergestellt wird, erlaubt uns die dargelegte gruppentheoretische Auffassung der ersten Lieschen Abbildung nun in der Tat eine *systematische*, nämlich unter Anwendung der Prinzipien von Lies Theorie der Transformationsgruppen erfolgende *Herleitung* der zweiten Abbildung aus der ersten. Wir gewinnen dadurch sofort auch für diese neue Abbildung eine wünschenswerte gruppentheoretische Basis.

Der Zusammenhang wird geliefert durch Einführung sogenannter *kanonischer* Parameter und Variablen in die bisherige Darstellung (63) der Grenzgruppe G_5^r.

24. Ist eine r-gliedrige Gruppe G_r gegeben durch ihre infinitesimalen (linearunabhängigen) Transformationen

$$X_k f = \sum_{i=1}^{r} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad k = 1, \ldots, r, \tag{79}$$

so lassen sich ihre endlichen Transformationen mit Hilfe der *kanonischen Parameter* α_k bekanntlich [14]) darstellen in der *kanonischen Form*

$$x_i' = x_i + \sum_k \alpha_k X_k(x_i) + \frac{1}{2!} \sum_{k,l} \alpha_k \alpha_l X_k X_l(x_i) + \cdots. \tag{80}$$

---

[13]) S. Lie-F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen 2, Leipzig 1890, S. 521.

[14]) Vgl. z. B. S. Lie-G. Scheffers, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, Leipzig 1893, S. 454.

Sie ist dadurch ausgezeichnet, daß proportionalen Parametersystemen $\alpha_k t$ die ∞^1 Transformationen einer kontinuierlichen eingliedrigen Untergruppe aus G_r entsprechen.

Nun ist unsere Gruppe G_5^r (63) oder, was im Wesen auf dasselbe hinauskommt, D_5^r bei inhomogener Darstellung ($x_0 = a_0 = 1$) nach (76) erzeugt durch die infinitesimalen Transformationen

$$(81) \qquad \begin{cases} X_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \quad X_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_3}, \\ X_4 f = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f}{\partial x_4}, \quad X_5 f = x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f}{\partial x_5}. \end{cases}$$

Die Entwicklung (80) liefert also

$$(82) \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 + \alpha_1 \\ x_2' = x_2 + \alpha_2 \\ x_3' = x_3 + \alpha_4 x_1 + \alpha_5 x_2 + \alpha_3 + \dfrac{\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_5}{2} \\ x_4' = x_4 + \alpha_4 \\ x_5' = x_5 + \alpha_5 \end{cases}$$

als endliche Darstellung von G_5^r. Verglichen mit den inhomogenen Formeln (63) ergeben sie den folgenden Zusammenhang der alten Parameter a_i ($a_0 = 1$) mit den neuen *kanonischen Parametern* α_i:

$$(83) \qquad \begin{cases} a_1 = \alpha_1 \\ a_2 = \alpha_2 \\ a_3 = \alpha_3 + \dfrac{\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_5}{2} \\ a_4 = \alpha_4 \\ a_5 = \alpha_5. \end{cases}$$

Wir führen noch *kanonische Variable* $\xi_1, \ldots, \xi_5$ ein durch Formeln analog (83):

$$(84) \qquad \begin{cases} x_1 = \xi_1 \\ x_2 = \xi_2 \\ x_3 = \xi_3 + \dfrac{\xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_5}{2} \\ x_4 = \xi_4 \\ x_5 = \xi_5 \end{cases}$$

und finden schließlich, wenn wir noch einen homogenisierenden Parameter α_0 und eine ebensolche Variable ξ_0 heranziehen, die folgende *kanonische Darstellung der Gruppen* G_5^r oder D_5^r *mittels kanonischer Parameter und Variablen*:

$$(85) \qquad \begin{cases} \xi_0' = \xi_0 \alpha_0 \\ \xi_1' = \xi_0 \alpha_1 + \xi_1 \alpha_0 \\ \xi_2' = \xi_0 \alpha_2 + \xi_2 \alpha_0 \\ \xi_3' = \xi_0 \alpha_3 + \frac{1}{2} \xi_1 \alpha_4 + \frac{1}{2} \xi_2 \alpha_5 + \xi_3 \alpha_0 - \frac{1}{2} \xi_4 \alpha_1 - \frac{1}{2} \xi_5 \alpha_2 \\ \xi_4' = \xi_0 \alpha_4 + \xi_4 \alpha_0 \\ \xi_5' = \xi_0 \alpha_5 + \xi_5 \alpha_0. \end{cases}$$

25. Zu den kanonischen Variablen ξ_i und den Formeln (83) hätten wir, einen von Study [15]) für einfach-transitive Gruppen angegebenen Weg beschreitend, auch einfacher

[15]) E. Study, Complexe Zahlen und Transformationsgruppen, Berichte d. Kgl. sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig 25 (1889), S. 177—228.

und eleganter so gelangen können: Es sei wie in (66) oder (75)

$$x' = xa$$

eine Transformation aus G_5^r oder D_5^r. Dabei wollen wir uns jetzt Parameter und Variable inhomogen denken, d. h. es sei

$$(86) \qquad \begin{cases} x = e_0 + \bar{x}, & \bar{x} = \sum_1^5 x_i e_i, \\ a = e_0 + \bar{a}, & \bar{a} = \sum_1^5 a_i e_i. \end{cases}$$

Dann wollen wir mit Study setzen:

$$(87) \qquad a = e^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\alpha} = \sum_1^5 \alpha_i e_i$$

und erhalten für G_5^r und D_5^r die Darstellung

$$(88) \qquad x' = x e^{\bar{\alpha}}.$$

Das ist

$$(89) \qquad x' = x\left(e_0 + \bar{\alpha} + \frac{1}{2!}\bar{\alpha}^2 + \frac{1}{3!}\bar{\alpha}^3 + \cdots\right).$$

Offenbar stellt nun $x' = x e^{\bar{\alpha} t}$ eine eingliedrige Untergruppe und $x' = x e^{\bar{\alpha}\partial t} = x(e_0 + \bar{\alpha}\,\partial t)$ ihre infinitesimale Transformation vor, die nach einfacher Rechnung auch geschrieben werden kann:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{\alpha} + \bar{x}\bar{\alpha}$$

oder ausführlicher:

$$\frac{d}{dt}\left(\Sigma\, x_i e_i\right) = \Sigma\, \alpha_i e_i + (x_1\alpha_4 + x_2\alpha_5)\, e_3\,.$$

Unter Beachtung von (81) hat man also

$$(90) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \Sigma\, \alpha_k\, X_k(x_i),$$

woraus sofort folgt, daß die Studysche Darstellung (88) mit der den Formeln (80) entsprechenden *kanonischen Form* (82) der Gruppen G_5^r und D_5^r übereinstimmt. In der Tat liefert (87) ausgerechnet den folgenden Zusammenhang der Parameter a_i mit den kanonischen Parametern α_i:

$$\begin{aligned} a = e^{\bar{\alpha}} &= e_0 + \bar{\alpha} + \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}^2 + \cdots, \\ &= e_0 + \sum_1^5 \alpha_i e_i + \tfrac{1}{2}\sum_1^5 \alpha_i\alpha_k e_i e_k + \cdots, \\ e_0 + \sum_1^5 a_i e_i &= e_0 + \sum_1^5 \alpha_i e_i + \tfrac{1}{2}(\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_5)\, e_3. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt wieder die Formeln (83).

26. Deuten wir die kanonischen Variablen ξ_i der Darstellung (85) der Gruppe G_5^r in neuer Weise als *homogene Punktkoordinaten im* R_5, so stellt dieses System (85) wieder eine projektive, einfach-transitive Gruppe S_5^r vor. Deren Keim ist

$$(91) \qquad \boxed{f_1 - \tfrac{1}{2}\xi_4 f_3, \quad f_2 - \tfrac{1}{2}\xi_5 f_3, \quad f_3, \quad f_4 + \tfrac{1}{2}\xi_1 f_3, \quad f_5 + \tfrac{1}{2}\xi_2 f_3.}$$

Die Gruppe S_5^r ist, wie ein Vergleich mit (76) oder (77) lehrt, eine (invariante) Untergruppe der $\boldsymbol{G_9}$ der Grenzbewegungen des isotropen I_5. Ihre Transformationen sollen als

Rechtsschiebungen bezeichnet werden. Dies ist sinnvoll, weil die eingliedrigen Untergruppen von S_5^r *geradlinige Bahnkurven* besitzen, wie aus der Verwendung kanonischer Parameter folgt.

Auch die Formeln (85) lassen sich mit Hilfe eines *Systems hyperkomplexer Zahlen*

$$\xi = \sum_0^5 \xi_i e_i, \qquad \alpha = \sum_0^5 \alpha_i e_i \tag{92}$$

in eleganter Weise zusammenfassen, wobei für die Einheiten e_i jetzt die folgende Produkttafel zu verwenden ist:

(93)

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	0	0	0	$\frac{1}{2}e_3$	0
e_2	e_2	0	0	0	0	$\frac{1}{2}e_3$
e_3	e_3	0	0	0	0	0
e_4	e_4	$-\frac{1}{2}e_3$	0	0	0	0
e_5	e_5	0	$-\frac{1}{2}e_3$	0	0	0

Dann schreibt sich die Darstellung (85) einfach so:

$$\xi' = \xi\alpha. \tag{94}$$

Die Produktregel lautet wieder

$$\alpha'' = \alpha\alpha'. \tag{95}$$

27. Führen wir auch in die Darstellung (69) der zur Gruppe G_5^r reziproken Gruppe G_5^l nach (83) und (84) kanonische Parameter β_i und Variable ξ_i ein, so ergibt sich

$$\begin{cases} \xi_0' = \beta_0\xi_0 \\ \xi_1' = \beta_1\xi_0 + \beta_0\xi_1 \\ \xi_2' = \beta_2\xi_0 + \beta_0\xi_2 \\ \xi_3' = \beta_3\xi_0 - \frac{1}{2}\beta_4\xi_1 - \frac{1}{2}\beta_5\xi_2 + \beta_0\xi_3 + \frac{1}{2}\beta_1\xi_4 + \frac{1}{2}\beta_2\xi_5 \\ \xi_4' = \beta_4\xi_0 + \beta_0\xi_4 \\ \xi_5' = \beta_5\xi_0 + \beta_0\xi_5 \end{cases} \tag{96}$$

oder

$$\xi' = \beta\xi \tag{97}$$

mit der Produktregel

$$\beta'' = \beta'\beta. \tag{98}$$

Deuten wir auch hier die Variablen ξ_i als Punktkoordinaten im I_5, so ist (96) eine projektive fünfgliedrige einfach-transitive Gruppe S_5^l, die reziproke der Gruppe S_5^r. Ihr Keim ist

$$\boxed{f_1 + \tfrac{1}{2}\xi_4 f_3, \quad f_2 - \tfrac{1}{2}\xi_5 f_3, \quad f_3, \quad f_4 - \tfrac{1}{2}\xi_1 f_3, \quad f_5 - \tfrac{1}{2}\xi_2 f_3.} \tag{99}$$

Sie ist ebenfalls in $\boldsymbol{G_9}$ enthalten, stellt also eine elementare Gruppe von Grenzbewegungen des isotropen I_5 vor, die wir als *Linksschiebungen* von I_5 bezeichnen, aus ebendemselben Grunde wie oben. In S_5^r sowohl wie in S_5^l ist als gemeinsame invariante Untergruppe die S_1 der Schiebungen in vollisotroper Richtung enthalten (die sich für $\alpha = \beta = \gamma_0 e_0 + \gamma_3 e_3$ ergibt).

Das Produkt

$$\xi' = \beta\xi\alpha \tag{100}$$

von S_5^r und S_5^l ist wieder die Gruppe $\boldsymbol{G_9}$ der Grenzbewegungen des isotropen I_5.

Tatsächlich kann man aus (91) und (99) den Keim (76) von $\boldsymbol{G_9}$ durch Linearkombination erhalten. Jede Grenzbewegung von S_5 läßt sich also (sogar auf ∞^1 Arten) als Produkt zweier Schiebungen verschiedener Arten in kommutativer Weise erzeugen.

(101) $$\xi' = \alpha^{-1}\,\xi\alpha$$

stellt schließlich wieder (ebenso wie (73)) die G_4 jener Grenzbewegungen vor, welche den Koordinatenursprung O_0 festlassen (Bündeldrehungen).

Man prüft leicht nach, daß die Gruppe G_5^r in jeder ihrer beiden Darstellungen (62) und (85) mit ihrer sogenannten ersten Parametergruppe übereinstimmt, während ihre zweite Parametergruppe einfach (69) und (96) ist. Deutet man also die Parameter von G_5^r als Variable im *Parameterraum* I_5, so lassen sich *die Gruppen* D_5^r *und* D_5^l *auffassen als projektive Parametergruppen der Grenzgruppen des isotropen Raumes* I_3. S_5^r *und* S_5^l *aber sind die kanonischen Parametergruppen und haben zugleich kanonische Form.* Sie sind, wie man sich überzeugt, ihre eigenen kanonischen Parametergruppen.

28. Im Parameterraum ist jeder Grenzbewegung des isotropen I_3 vom kanonischen Parametersystem ξ_i eindeutig der Punkt ξ zugeordnet. Nun können wir die Parameter ξ_i auch als *kanonische Koordinaten* jenes (regulären) *Flächenelementes* deuten, das im isotropen I_3 durch die Grenzbewegung ξ aus dem Grundelement (0, 0, 0, 0, 0) entsteht. Dabei sind, wie immer, unter *Flächenelementen* nicht eigentlich Gebilde projektiver Natur, sondern vielmehr bloß Repräsentanten von *Somen der Grenzgruppe* zu verstehen. Der Punkt ξ wird also dann im Parameterraum I_5 *Bildpunkt* jenes Flächenelementes, dessen kanonische Koordinaten ξ_i mit den herkömmlichen Koordinaten x_i (vgl. (74)) durch die Formeln (84) zusammenhängen. Diese Abbildung ist nun im wesentlichen identisch mit der *zweiten Lieschen Deutung der Flächenelemente* (x, y, z, p, q) *des* R_3 *als Punkte* $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$ *des* R_5.

In der Tat verwendet Lie [13]) die Abbildungsformeln

(102)
$$\begin{cases} \xi_1 = x \\ \xi_2 = y \\ \xi_3 = z - \frac{1}{2}\,(px + qy) \\ \xi_4 = \frac{1}{2}\,p \\ \xi_5 = \frac{1}{2}\,q\,, \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= \xi_1 \\ y &= \xi_2 \\ z &= \xi_3 + \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_5 \\ p &= 2\xi_4 \\ q &= 2\xi_5, \end{aligned}$$

aus denen unsere Formeln (84) entstehen, wenn man ξ_4 durch $\frac{\xi_4}{2}$ und ξ_5 durch $\frac{\xi_5}{2}$ ersetzt. Der Unterschied kann durch eine einfache Änderung der Koordinateneinheiten behoben werden, ist also an sich belanglos.

Damit ist auch die *zweite Liesche Abbildung*, so wie vorhin die *erste*, auf eine einfache *gruppentheoretische Basis* gestellt. *Beide Male fließt der gruppentheoretische Sinn der Abbildungen aus der Kinematik der Grenzgruppe* G_5^r *des isotropen* I_3. Der Bildraum I_5 ist stets der Parameterraum dieser, die Flächenelemente des I_3 in einfach-transitiver Weise vertauschenden Gruppe, wobei zu deren analytischer Beschreibung das eine Mal die Darstellung (63), das andere Mal die kanonische Darstellung (85) verwendet wurde.

Es gelingt also in der Tat, die zweite Abbildung aus der ersten unter Anwendung gruppentheoretischer Prinzipien herzuleiten. Die sich ergebende, gegen Lies Formeln nur unwesentlich modifizierte Gestalt der zweiten Abbildung können wir als ihre *kanonische* bezeichnen.

29. Die wesentlichste Leistung der zweiten Lieschen Abbildung ist die, einen *Elementverein*, d. h. eine ein- oder zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Flächen-

elementen x, die (identisch in den Darstellungsparametern) der Gleichung

(103) $$dx_3 = x_4 dx_1 + x_5 dx_2$$

genügen, abzubilden auf *Kurven und Flächen des R_5, deren Tangenten bzw. Tangentenebenen vollständig dem linearen Komplex*

(104) $$p_{03} + \tfrac{1}{2}(p_{14} + p_{25}) = 0$$

angehören, den wir fortan den *Hauptkomplex* nennen.

Das zweite Liesche Bild schließlich der Gruppen G_5^r, G_5^l, G_9 des isotropen I_3 sind die Gruppen $S_5^r, S_5^l, \boldsymbol{G}_9$ des isotropen I_5.

30. Im Sinne der Kinematik der Grenzgruppe des isotropen I_3 *äquivalente* (natürlich äquivalente) *Systeme von Somen* sind endlich solche, die durch die erste *oder* zweite Liesche Abbildung übertragen werden auf Punktsysteme des isotropen I_5, die zueinander *kongruent* sind im Sinne seiner Grenzgruppe $\boldsymbol{G}_9$.

VI. Eingliedrige Untergruppen.
Senärer Abschluß des Kontinuums der Somen des isotropen I_3.

31. Eine genauere Untersuchung der möglichen Typen von Grenzbewegungen des isotropen I_3 und der dazu reziproken Transformationen wird am besten an die *Klassifikation der eingliedrigen Untergruppen von G_5^r und G_5^l* anschließen. Diese lassen sich im Sinne Lies erzeugen aus den infinitesimalen Transformationen

$$x' = xa, \qquad x' = bx,$$

wobei etwa

$$a = e_0 + \delta t \sum_1^5 a_i e_i \quad \text{und} \quad x = e_0 + \sum_1^5 x_i e_i$$

ist. Wir wiederholen sie n-mal und erhalten

$$x' = xa^n, \qquad x' = b^n x,$$

wobei z. B.

$$a^n = e_0 + n\delta t \sum_1^5 a_i e_i + \binom{n}{2} \delta t^2 (a_1 a_4 + a_2 a_5)\, e_3$$

ist, wie man durch vollständige Induktion leicht nachweist. Lassen wir nun, im Sinne Liescher Gedanken, $\delta t \to 0$ und $n \to \infty$ gehen, so zwar, daß $n\delta t = t$ wird, dann geht $a^n \to \dot{a}$ über, wobei

(105) $$\dot{a} = e_0 + t \sum_1^5 a_i e_i + \frac{t^2}{2}(a_1 a_4 + a_2 a_5)\, e_3$$

wird.

(106) $$x' = x\dot{a} \qquad\qquad x' = \dot{b}x$$

stellen die gesuchten eingliedrigen Untergruppen G_1^r und G_1^l von G_5^r und G_5^l vor. Sie lauten explizite (inhomogene Schreibung!):

(107^r) G_1^r	(107^l) G_1^l
$x_1' = a_1 t + x_1$	$x_1' = b_1 t + x_1$
$x_2' = a_2 t + x_2$	$x_2' = b_2 t + x_2$
$x_3' = (a_1 a_4 + a_2 a_5)\frac{t^2}{2} + (a_3 + a_4 x_1 + a_5 x_2)t + x_3$	$x_3' = (b_1 b_4 + b_2 b_5)\frac{t^2}{2} + (b_3 + b_1 x_4 + b_2 x_5)t + x_3$
$x_4' = a_4 t + x_4$	$x_4' = b_4 t + x_4$
$x_5' = a_5 t + x_5.$	$x_5' = b_5 t + x_5.$

Man hätte diese Formeln natürlich schnellstens durch einen Integrationsprozeß aus den Symbolen (76) der Gruppen erhalten können. Es kommt aber der gewählten Herleitung doch wohl größeres Interesse zu.

32. Die *Klassifikation* läuft nun für beide Gruppen völlig parallel. Wir führen sie zuerst für die Grenzbewegungen (107^r) durch. Wir verzichten dabei auf eine explizite Hervorhebung jener *Sonderfälle*, die durch Auszeichnung der beiden absoluten Geraden (1), (2) aus den jeweils angeführten Hauptfällen entstehen. Diese Sonderfälle sind den Hauptfällen affinäquivalent und ergeben sich durch Verschwinden von a_1 oder a_2 und a_4 oder a_5. Wir finden so folgende *Typen*:

$\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}$: $a_1 a_4 + a_2 a_5 \neq 0$. *Allgemeine Grenzbewegungen.* Die Punkte der bei dieser Grenzbewegung mitgenommenen Flächenelemente x beschreiben in parallelen Ebenen liegende kongruente, jeweils koachsiale Parabeln (parabolische Kreise des I_3). Die Ebenen der Flächenelemente umhüllen parabolische Zylinder, welche die absolute Ebene Ω (1) von I_3 im absoluten Punkte O berühren. Wir nennen diesen ersten Typ *allgemeine Grenzbewegung* des isotropen Raumes. Ein spezielles Beispiel dafür sind die allgemeinen Drehungen der Gruppen D_3^r (38^r) und D_3^l (38^l).

$\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}$: $a_1 a_4 + a_2 a_5 = 0$. *Windschiefe Grenzbewegungen.* Die Punkte der Flächenelemente beschreiben die Strahlen eines *parabolischen Netzes* mit der *Plücker*schen Darstellung

$$(108) \qquad \begin{cases} a_3 p_{01} - a_1 p_{03} - a_5 p_{12} = 0, \\ a_3 p_{02} - a_2 p_{03} + a_4 p_{12} = 0. \end{cases}$$

Die Ebenen drehen sich um diese Strahlen. Im besonderen ordnen sich die allgemeinen Rechts- und Linksschiebungen S_3^r (42^r) und S_3^l (42^l) des I_3 hier als ein Beispiel ein.

$\boldsymbol{R}_{\mathrm{III}}$: $a_1 = a_2 = 0$. *Isotrope Grenzbewegungen.* Die Ebene

$$\pi = a_3 x_0 + a_4 x_1 + a_5 x_2 = 0$$

bleibt punktweise fest. Alle anderen Punkte werden auf vollisotropen Geraden verschoben. Die Ebenen der Flächenelemente drehen sich um ihre Schnittgerade mit π.

$\boldsymbol{R}_{\mathrm{IV}}$: $a_4 = a_5 = 0$. *Translationen.*

$\boldsymbol{R}_{\mathrm{V}}$: $a_1 = a_2 = a_4 = a_5$. *Translationen in vollisotroper Richtung.*

33. Die Klassifikation der Transformationen von G_5^l kann sich nun auf die eben durchgeführte von G_5^r stützen. Da nämlich diese Gruppen vertauschbar sind (im strengeren Sinne) werden die Flächenelemente bei G_5^l Figuren beschreiben müssen, die untereinander im Sinne der Gruppe G_5^r bewegungskongruent sind. Diese Bahnfiguren sind daher auch kongruent der vom Grundelement e_0 ($x_i = 0$) beschriebenen Figur. Für e_0 aber sind, wie (107) sofort zeigt, die von den Gruppen G_1^r und G_1^l hervorgerufenen Figuren (falls $\dot{a} = \dot{b}$, d. h. $a_i = b_i$ ist) völlig identisch. Beschreibt insbesondere das Grundelement e_0 bei G_1^l einen Elementverein (den wir hier als *Elementarstreifen* bezeichnen), was für

$$(109) \qquad b_3 = 0$$

eintritt, so gilt gleiches überhaupt für jedes Flächenelement. Ganz allgemein können wir sagen, es *kopiert* jedes Flächenelement bei G_5^l die Bewegungsart des Grundelementes e_0. Daher liefert die eben geleistete Klassifikation der Grenzbewegungen von e_0 unmittelbar auch die gewünschte *Einteilung der Transformationen von* G_5^l, die an Hand der Darstellung (107^l) lautet:

$\boldsymbol{L}_{\mathrm{I}}$: $b_1 b_4 + b_2 b_5 \neq 0$. *Allgemeine Linksbewegung.* Die Punkte der Flächenelemente beschreiben untereinander auch hinsichtlich ihrer Stellung kongruente parabolische Kreise, die Ebenen umhüllen ebensolche parabolische Zylinder.

Für $b_3 = 0$ liegen die Parabeln auf den Zylindern, es entstehen *parabolische Elementarstreifen.*

$\boldsymbol{L}_{\mathrm{II}}$: $b_1 b_4 + b_2 b_5 = 0$. *Windschiefe Linksbewegung.* Die Punkte der Flächenelemente beschreiben gleichförmig gerade Linien p des Gebüsches $b_2 p_{01} - b_1 p_{02} = 0$, während sich die Ebenen gleichfalls um Geraden $\overline{p}$ dieses Gebüsches drehen.

Die möglichen Geradenpaare $p, \overline{p}$ haben dabei stets dieselben beiden Invarianten (31) oder (32) und sind dadurch auch charakterisiert.

Für $b_3 = 0$ erfolgt die Drehung der Ebenen um die Bahngerade der Punkte (wobei Projektivität herrscht). Es entstehen *windschiefe Elementarstreifen.*

$\boldsymbol{L}_{\mathrm{III}}$: $b_1 = b_2 = 0$. *Isotrope Linksbewegung.* Zu jedem Punkte P gehört eine mit ihm translationsinvariant verbundene isotrope Ebene π. Während der Punkt eines Flächenelementes sich in vollisotroper Richtung verschiebt, dreht sich seine Ebene um ihre Schnittgerade mit der zugehörigen Ebene π.

Für $b_3 = 0$ geht die Ebene π durch den Punkt P hindurch. Bei dieser Linksbewegung bleibt P fest, während sich die Ebene seines Flächenelementes um eine durch ihn gehende Gerade dreht. Es entstehen *achsiale Elementarstreifen.*

Die Transformationen $\boldsymbol{L}_{\mathrm{III}}$ bilden in ihrer Gesamtheit eine Gruppe G_3^l, jene insbesondere mit $b_3 = 0$ die Gruppe G_2^l der *Bündeldrehungen* von I_3.

$\boldsymbol{L}_{\mathrm{IV}}$: $b_4 = b_5 = 0$. Das Grundelement e_0 erleidet, wie bei $\boldsymbol{R}_{\mathrm{IV}}$ eine reine Translation und alle anderen Flächenelemente kopieren individuell diese Bewegung. Ihre Punkte erleiden dabei dieselbe Translation

$$x_1' = b_1 t + x_1 \qquad x_2' = b_2 t + x_2.$$

Im Raum beschreiben sie aber keineswegs parallele Geraden, sondern solche, welche gegen das jeweilige Flächenelement konstanten Winkel (34) einschließen.

Im Fall $b_3 = 0$ wird dieser Winkel null, die Ebene des Flächenelementes wird in sich verschoben. Es entstehen *gerade planare Elementarstreifen.*

Die Transformationen des Typus $\boldsymbol{L}_{\mathrm{IV}}$ bilden insgesamt eine Gruppe G_3^l, jene besonderen mit $b_3 = 0$ die zweigliedrige Gruppe G_2^l der *Elementenschiebungen.*

$\boldsymbol{L}_{\mathrm{V}}$: $b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = 0$ gibt wieder die G_1 der *vollisotropen Schiebungen*, die man hier auch als *Dilatationen* des isotropen Raumes bezeichnen kann.

Die erste Liesche Abbildung überträgt die eben durchgeführte Einteilung der eingliedrigen Untergruppen von G_5^r und G_5^l auf die analoge der Gruppen D_5^r und D_5^l des isotropen I_5. Eine ausführliche Beschreibung dieser kann hier unterbleiben. Ihre Bahnkurven sind durch (107^r) und (107^l) gegeben; diesen Formeln entnimmt man, daß sie (wenigstens im allgemeinen Falle) parabolische Kreise des isotropen I_5 sind. Dadurch rechtfertigt sich der Name *Drehungen* für diese Gruppen.

34. Die Klassifikation der Transformationen von G_5^r und G_5^l hätte auch an Hand ihrer *kanonischen Darstellung* (85), (96) durchgeführt werden können. Diese Art der Einteilung erhält man auch, wenn man zuerst mittels der zweiten Lieschen Abbildung (84) die Gruppen G_5^r und G_5^l des I_3 auf die *Schiebungsgruppen* S_5^r und S_5^l des isotropen I_5 überträgt und deren *Verhalten zum absoluten Kegel* Γ_3^2 (78) *und zum Hauptkomplexe* (104) studiert.

Was deren gegenseitige Lage betrifft, so stellen wir vorweg fest, daß die beiden ausgezeichneten erzeugenden Ebenen der einen Schar von Γ_3^2

$$(110) \qquad \begin{cases} \varepsilon_{12} \equiv x_0 = x_4 = x_5 = 0 \\ \varepsilon_{45} \equiv x_0 = x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

sowie *alle* Ebenen der anderen Schar im Hauptkomplexe enthalten sind.

35. Es seien ferner ξ und ξ' zwei Punkte des I_5; dann existiert wegen der einfachen Transitivität eine eingliedrige Gruppe

S_1^r von Rechtsschiebungen, | S_1^l von Linksschiebungen,

in deren Verlauf ξ nach ξ' gelangt. Ihre *Bahnkurven* sind wegen der Verwendung kanonischer Parameter *geradlinig*.

Die Darstellung dieser Schiebungen $\xi \to \xi'$ ist

$$\xi' = \xi\alpha\,. \qquad | \qquad \xi' = \beta\xi\,.$$

Daraus folgt für die Schiebungsparameter

$$(111^r) \qquad \alpha = \xi^{-1}\xi', \qquad | \qquad (111^l) \qquad \beta = \xi'\xi^{-1},$$

wobei die „reziproke" ξ^{-1} von ξ lautet

$$(112) \qquad \xi^{-1} = \xi_0 e_0 - \sum_1^5 \xi_i e_i\,.$$

Mit Hilfe der Plückerschen Linienkoordinaten

$$(113) \qquad p_{ik} = \xi_i \xi_k' - \xi_k \xi_i'$$

der Bahngeraden $[\xi\xi']$ kann man schreiben

$$(114^r) \quad \begin{aligned} \alpha = {} & \xi_0\xi_0' e_0 + p_{01}e_1 + p_{02}e_2 \\ & + (p_{03} - \tfrac{1}{2}(p_{14} + p_{25}))\, e_3 \\ & + p_{04}e_4 + p_{05}e_5\,. \end{aligned} \qquad | \qquad (114^l) \quad \begin{aligned} \beta = {} & \xi_0\xi_0' e_0 + p_{01}e_1 + p_{02}e_2 \\ & + (p_{03} + \tfrac{1}{2}(p_{14} + p_{25}))\, e_3 \\ & + p_{04}e_4 + p_{05}e_5\,. \end{aligned}$$

Die ∞^4 Bahngeraden einer eingliedrigen Schiebungsgruppe des isotropen I_5 erfüllen eine Linienmannigfaltigkeit, die wir allgemein als ein *parabolisches Netz von Strahlen* bezeichnen wollen und analytisch durch eine zweireihige Matrix vom Range eins in Graßmann-Plückerschen Linienkoordinaten darstellen können:

(115)

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} - \frac{1}{2}(p_{14} + p_{25}) & p_{04} & p_{05} \end{Vmatrix} = 0 \qquad \begin{Vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} + \frac{1}{2}(p_{14} + p_{25}) & p_{04} & p_{05} \end{Vmatrix} = 0$$

parabolisches *Rechtsnetz.* | parabolisches *Linksnetz.*

Die Fernpunkte dieser Bahngeraden gehören für jede solche Gruppe einer durch den absoluten Punkt O des isotropen Raumes gehenden (im Hauptkomplexe liegenden) *Leitgeraden* l an.

Zum Nachweis sei etwa die S_1^r

$$(116) \qquad \xi' = \xi\dot{\alpha} = (\xi_0 e_0 + \sum_1^5 \xi_i e_i)(\alpha_0 e_0 + t \sum_1^5 \alpha_k e_k)$$

genommen. Es ist

$$(117) \qquad \xi' = \xi_0\alpha_0 e_0 + \alpha_0 \sum_i \xi_i e_i + t\{\xi_0 \sum_k \alpha_k e_k + \sum_{ik} \xi_i \alpha_k e_i e_k\};$$

als Fernpunkt ξ_u der Bahngeraden des Punktes ξ ergibt sich (für $t \to \infty$)

$$(118) \qquad \xi_u = \xi_0 \sum_1^5 \alpha_k e_k + [\xi\alpha]\, e_3,$$

wobei

$$(119) \qquad [\xi\alpha] \equiv \xi_1\alpha_4 - \xi_4\alpha_1 + \xi_2\alpha_5 - \xi_5\alpha_2$$

bedeutet. Wir nennen ξ_u den *Zielpunkt* von ξ für die Schiebungsgruppe S_1^r. Er beschreibt, wenn ξ variiert, in der Tat eine Gerade l der erwähnten Art. Aus (118) folgt weiter, daß alle Punkte ξ des I_5, welche dem l enthaltenden R_4

$$[\xi\alpha] = \text{konst. } \xi_0 \tag{120}$$

angehören, den gleichen Zielpunkt ξ_u, also parallele Bahngeraden haben. Die Beziehung dieser Punkte ξ_u zu dem Büschel der R_4 (120) ist dabei eine projektive (wobei dem absoluten Punkte O der absolute (Fern)-R_4 entspricht). Es liegt also in diesem parabolischen Strahlnetz des I_5 eine wirkliche mehrdimensionale Übertragung des parabolischen Netzes eines R_3 vor.

Der Zielpunkt des Koordinatenursprunges e_0 bei einer Links- oder Rechtsschiebung γ ist

$$\overline{\gamma} = \sum_1^5 \gamma_k e_k. \tag{121}$$

Durch seine Angabe ist die eingliedrige Schiebungsgruppe eindeutig festgelegt. Wir nennen ihn den *Hauptzielpunkt.*

Die Linksnetze mit

$$\beta_3 = 0 \tag{122}$$

liegen vollständig im Hauptkomplexe. Ihre Gruppen S_1^l sind die zweiten Lieschen Bilder der Gruppen G_1^l, deren $b_3 = 0$ ist, bei welchen nämlich die Flächenelemente *Elementarstreifen* der verschiedenen Arten beschreiben.

36. Die *Struktur der beiden Schiebungsgruppen* ist denkbar einfach und übersichtlich. Die fünf Typen eingliedriger Gruppen G_1^r, G_1^l des Raumes I_3 übertragen sich auf eingliedrige Schiebungsgruppen S_1^r, S_1^l, die sich durch die *Lage ihrer Leitgeraden l gegen den Maßkegel Γ_3^2* (78) *und seine ausgezeichneten erzeugenden Ebenen $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{45}$* (110) *unterscheiden.* Sind die Parameter dieser Links- oder Rechtsschiebung γ_i, so finden sich, analog den früheren Einteilungen, folgende *fünf Möglichkeiten*:

I. $\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_5 \neq 0$. Die Leitgerade l liegt *nicht* auf dem absoluten Kegel Γ_3^2.

II. $\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_5 = 0$. Die Leitgerade liegt als Mantellinie auf dem Kegel Γ_3^2.

III. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. l liegt als Mantellinie von Γ_3^2 in der erzeugenden Ebene ε_{45}.

IV. $\gamma_4 = \gamma_5 = 0$. l liegt hier in ε_{12}.

V. $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = \gamma_5$. Fall der vollisotropen Schiebungen. Es existiert keine Leitgerade, sondern nur als einziger Zielpunkt ξ_u der absolute Punkt O_3 von I_5.

37. Die gruppentheoretische Verknüpfung der durch reguläre Flächenelemente des isotropen I_3 (d. s. solche, deren kanonische Koordinaten endlich sind, $\xi_0 \neq 0$) repräsentierten regulären Somen der Grenzgruppe G_5 mit der Geometrie des isotropen kanonischen Parameterraumes I_5 vermittelt eine *neue Möglichkeit, diese Somen zu einem im Sinne der Gruppe G_9 natürlichen Kontinuum abzuschließen.* Diese Art des Abschlusses gestattet es auch, *die Singularitäten der zweiten Lieschen Abbildung zu beseitigen und sie zu einer lückenlos umkehrbar eindeutigen Transformation zu gestalten.* Man hat zu diesem Zwecke, wie dies auch die Struktur der Schiebungsgruppen nahelegt, den isotropen I_5 in *projektiver* Weise abzuschließen. Sein *senäres Gebiet* ist dann in adäquater Weise durch die homogenen Sextupel $(\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_5)$ beschrieben. Jedem Punkte ξ des projektiven I_5 muß dann eineindeutig ein Soma des I_3 entsprechen. Dieses kann im Bereiche der Regularität der zweiten Lieschen Abbildung ($\xi_0 \neq 0$) durch ein (reguläres) Flächenelement repräsentiert werden; im Irregularitätsbereiche ($\xi_0 = 0$) aber sind im Raume I_3

akzessorische oder *Grenzsomen* zu schaffen, die in ihrer Gesamtheit ein quinäres Gebiet, Bild des Fern-R_4 $\xi_0 = 0$, ausmachen. Will man auch sie durch Flächenelemente von I_3 darstellen, so werden, wegen des verschiedenen Zusammenhangs des Kontinuums der Flächenelemente projektiver Prägung und des senären Somenkontinuums, im allgemeinen erst gewisse *Systeme* von solchen Flächenelementen imstande sein, im Sinne der Geometrie unserer Gruppe G_9 dieses Grenzsoma zu repräsentieren.

Es bietet sich hier von selbst der folgende *Weg des Abschlusses* dar: Im Raume I_5 bestimmt jeder eigentliche Punkt ξ mit jedem uneigentlichen $\bar{\xi} = \sum_1^5 \bar{\xi}_i e_i$ eindeutig eine eingliedrige Gruppe von Rechts- oder Linksschiebungen $\gamma = \gamma_0 e_0 + \sum_1^5 \gamma_i e_i$ ($\gamma_0 =$ variabel, $\gamma_i =$ fest), bei welcher der Punkt ξ geradlinig gegen $\bar{\xi}$ wandert und diesen Punkt erreicht, wenn $\gamma_0 = 0$ wird. Es genügt dabei, sich allein auf die *Linksschiebungen* zu stützen. Wenn wir diesen Vorgang der Annäherung von ξ an $\bar{\xi}$ durch Lies zweite Abbildung auf den Raum I_3 übertragen, wird die Möglichkeit deutlich, die singulären Somen durch die eingliedrigen Gruppen G_1^l aus regulären Somen entstehen zu lassen, einfach dadurch, daß man in der kanonischen Darstellung $\xi' = \gamma\xi$ den variablen Parameter $\gamma_0 \to 0$ gehen läßt. Repräsentiert man die regulären Somen dabei durch Flächenelemente, so zeigt das Studium dieses Grenzprozesses leicht, in welcher Weise man auch *singuläre Somen* durch Flächenelemente projektiver Prägung aber singulärer Lage oder doch durch Systeme von solchen wird darstellen können. Wegen der Verschiedenheit der einander gegenübergestellten Kontinuen (projektive Flächenelemente — Somen der Grenzkinematik von I_3) wird in der Tat die völlige Eindeutigkeit im Entsprechen, d. h. der Einbau des senären Somenkontinuums in den Raum der projektiven Flächenelemente, nur durch Festsetzung geeigneter neuer Äquivalenzen herbeigeführt werden können. *Fügt man die geschaffenen Grenzsomen den regulären hinzu, so kann man das entstehende senäre Somenkontinuum im Sinne der Gruppe G_9 als ein natürliches bezeichnen. Die zweite Liesche Abbildung vermittelt jetzt eine umkehrbar-eindeutige und von allen Singularitäten befreite Zuordnung des Somenkontinuums auf die Punkte des projektiv abgeschlossenen Raumes I_5.*

38. Es wird genügen, wenn wir diesen Abschließungsgedanken wenigstens in einem wichtigen und interessanten Falle vollständig durchführen: *Wir wollen nachprüfen, in welchem Umfange Flächenelemente isotroper Stellung im Rahmen unseres senären Abschlusses als Vertreter von Somen* (oder doch Grenzlagen von solchen) *dienen können.*

Es genügt dann, die zweigliedrige Gruppe G_2^l der Elementendrehungen heranzuziehen, welche die Punkte X der Flächenelemente festhält, diese selbst aber im Bündel X variiert. Für deren kanonische Parameter β_i gilt:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0, \qquad \beta_0 : \beta_4 : \beta_5 = \text{beliebig.}$$

Feste Wahl von $\beta_4 : \beta_5$ hebt aus der Gruppe G_2^l eingliedrige Untergruppen G_1^l von Elementendrehungen heraus und $\beta_0 \to 0$ stellt den kontinuierlichen Übergang von regulären Somen zu singulären vor. Explizit lautet diese Gruppe G_2^l bzw. G_1^l:

$$(123) \qquad \begin{cases} \xi_0' = \beta_0\xi_0 \\ \xi_1' = \beta_0\xi_1 \\ \xi_2' = \beta_0\xi_2 \\ \xi_3' = -\tfrac{1}{2}\beta_4\xi_1 - \tfrac{1}{2}\beta_5\xi_2 + \beta_0\xi_3 \\ \xi_4' = \beta_4\xi_0 + \beta_0\xi_4 \\ \xi_5' = \beta_5\xi_0 + \beta_0\xi_5. \end{cases}$$

Im kanonischen Parameterraum I_5 beschreibt der zweite Liesche Bildpunkt ξ des als Soma aufzufassenden Flächenelementes zufolge der durch (123) dargestellten Schiebungsgruppen S_2^l bzw. S_1^l eine *Ebene* bzw. *Gerade*. Geht $\beta_0 \to 0$, so ergibt sich deren *Ferngerade* bzw. der *Fernpunkt*:

$$(124) \qquad \begin{cases} \xi_0^\times = \xi_1^\times = \xi_2^\times = 0 \\ \xi_3^\times = -\frac{1}{2}(\beta_4 \xi_1 + \beta_5 \xi_2) \\ \xi_4^\times = \beta_4 \xi_0 \\ \xi_5^\times = \beta_5 \xi_0 . \end{cases}$$

Diese Fernpunkte $\xi^\times$ und damit die erhaltenen Grenzsomen sind bloß von den Werten $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2$ der herangezogenen regulären Somen (Flächenelemente), *nicht* aber von deren ξ_3, ξ_4, ξ_5 abhängig. Die Punkte der ∞^3 Flächenelemente mit festem $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2$ liegen auf einer bestimmten vollisotropen Geraden. Die *Grenzlagen*, welche diese Elemente durch Variationen in ihren Bündeln (Elementendrehungen) annehmen können, nämlich die ∞^2 *Flächenelemente isotroper Stellung, sind fähig, obige* ∞^1 *Grenzsomen zu repräsentieren.* Jedes dieser ∞^1 Grenzsomen ist (ebenso wie die Gruppen G_2^l, G_1^l) unempfindlich gegen Schiebungen in vollisotroper Richtung. Daher ist *der Inbegriff solcher* ∞^1 *isotroper Flächenelemente, die durch diese vollisotropen Schiebungen auseinander entstehen, geeignet, ein derartiges eigentliches isotropes Grenzsoma des senären Somenkontinuums zu vertreten.*

VII. Zweigliedrige Untergruppen.

39. Für unsere ferneren Betrachtungen wird der *Hauptkomplex* des Raumes I_5 (104) eine gewisse Bedeutung haben. Mit ihm ist verbunden das *Nullsystem*

$$125) \qquad x_0 y_3 - x_3 y_0 + \tfrac{1}{2}(x_1 y_4 - x_4 y_1 + x_2 y_5 - x_5 y_2) = 0.$$

Es ordnet z. B. dem Koordinatenursprung O_0 den Null-R_4

$$(126) \qquad x_3 = 0,$$

dem absoluten Punkt O_3 von I_5 den absoluten R_4

$$(127) \qquad x_0 = 0$$

zu. Die im Null-R_4 enthaltenen Strahlen durch den Nullpunkt liegen im Hauptkomplexe und heißen *Nullstrahlen* oder *Komplexstrahlen*. Mit irgend zwei schneidenden Strahlen liegt auch ihr Büschel im Hauptkomplex. Eine *Ebene* allgemeiner Lage trägt ein Büschel von Komplexstrahlen. Denn jeder Punkt der Ebene hat einen Null-R_4, der sie nach einem Komplexstrahl schneidet. Der Scheitel des Büschels heißt *Nullpunkt der Ebene.* Es gibt aber auch Ebenen, deren sämtliche Geraden Komplexstrahlen sind, sogenannte *Komplexebenen.* Fassen wir nämlich einen beliebigen Punkt Y ins Auge und in seinem Null-R_4 eine willkürliche Gerade g. Ihre Verbindungsebene hat einzig die Strahlen um Y als Nullstrahlen. Anders aber, wenn g selbst Komplexstrahl ist. Dann sind wirklich sämtliche Geraden der Ebene $[Yg]$ im Hauptkomplexe enthalten. Uns interessieren die Komplexebenen, welche durch den Ursprung O_0 und durch den absoluten Punkt O_3 gehen. Man erhält sie so: Der Fern-R_3

$$(128) \qquad x_0 = 0, \quad x_3 = 0$$

ist im Hauptkomplex polar zur Geraden $[O_0 O_3]$ und schneidet diesen Komplex nach dem *Strahlgewinde*

$$(129) \qquad p_{14} + p_{25} = 0.$$

Die Verbindungsebenen der Punkte O_0 und O_3 mit den ∞^3 Strahlen des Gewindes (129) sind die gesuchten Komplexebenen.

Einer Geraden allgemeiner Lage ist im Nullsystem *polar* ein zu ihr windschiefer R_3. Zu einem Komplexstrahl aber gehört ein Null-R_3, der ihn vollständig enthält (*Komplexraum*). Zu einer Ebene allgemeiner Lage ist eine andere Ebene polar. Beide haben ihren Nullpunkt gemeinsam und spannen dessen Null-R_4 auf. Verbinden wir z. B. die Punkte O_0 oder O_3 mit zwei Geraden $g, \bar{g}$ des R_3 (128), welche polar sind bezüglich des Gewindes (129), so erhalten wir Paare polarer Ebenen. Eine Komplexebene ist zu sich selbst polar. *Durch jeden Komplexstrahl gibt es ein lineares Büschel von Komplexebenen. Sie spannen seinen nullpolaren Komplexraum auf.*

40. Wir wenden uns nun den *zweigliedrigen Gruppen* G_2^r und G_2^l des isotropen I_3 zu. Sie werden am besten sofort an Hand ihrer kanonischen Darstellung, d. h. geometrisch an Hand der ihnen vermöge Lies zweiter Abbildung entsprechenden Schiebungsgruppen S_2^r, S_2^l des isotropen I_5 untersucht. Deren erzeugende infinitesimale Transformationen sind nach (91), (99)

$$(130)\qquad \begin{aligned} U_1 &\equiv f_1 \mp \tfrac{1}{2}\xi_4 f_3, \quad & U_2 &\equiv f_2 \mp \tfrac{1}{2}\xi_5 f_3, \quad & U_3 &\equiv f_3, \\ U_4 &\equiv f_4 \pm \tfrac{1}{2}\xi_1 f_3, \quad & U_5 &\equiv f_5 \pm \tfrac{1}{2}\xi_2 f_3, \end{aligned}$$

mit den Werten der Poissonklammern

$$(131)\qquad (U_i U_k) = 0, \quad (U_1 U_4) = (U_2 U_5) = -(U_4 U_1) = -(U_5 U_2) = U_3.$$

Die linear-unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$(132)\qquad M \equiv \sum_{i=1}^{5} \mu_i U_i, \quad N \equiv \sum_k \nu_k U_k$$

erzeugen dann und nur dann eine *zweigliedrige Schiebungsgruppe* S_2^r oder S_2^l, wenn

$$(MN) = \lambda_1 M + \lambda_2 N$$

(mit konstanten λ) ist. Nun wird

$$(MN) = (\Sigma\, \mu_i U_i, \Sigma\, \nu_k U_k) = \Sigma\, \mu_i \nu_k (U_i U_k).$$

Setzen wir

$$(133)\qquad [\mu\nu] = \mu_1 \nu_4 - \mu_4 \nu_1 + \mu_2 \nu_5 - \mu_5 \nu_2,$$

so ist nach (131)

$$(134)\qquad (MN) = [\mu\nu]\, U_3.$$

M und N erzeugen also stets und nur in den folgenden beiden Fällen eine Gruppe S_2^r bzw. S_2^l:

(135) A) $[\mu\nu] = 0,$

B) (trivial in A) enthalten) aus M und N läßt sich U_3 durch Linearkombination gewinnen.

Wir nehmen diesen wenig interessanten Sonderfall B) vorweg. Er entsteht durch Zusammensetzung irgendeiner Gruppe S_1^r oder S_1^l mit der Gruppe der vollisotropen Translationen. Im Raume I_3 entsprechen ihm jene Gruppen G_2^r bzw. G_2^l, die durch Zusammensetzung der verschiedenen Typen $\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}$ bis $\boldsymbol{R}_{\mathrm{IV}}$ bzw. $\boldsymbol{L}_{\mathrm{I}}$ bis $\boldsymbol{L}_{\mathrm{IV}}$ von Gruppen G_1^r oder G_1^l mit der Gruppe der vollisotropen Translationen von I_3 entstehen. Als Bahnfiguren können in diesem Falle im I_5 nie Komplexebenen, im I_3 nie zweifache Elementvereine entstehen.

41. Im *Hauptfalle* A) liegt eine kommutative zweigliedrige Gruppe vor, bei der im Raume I_5 die Punkte ξ *Ebenen* beschreiben, deren Ferngeraden wir als *Zielgeraden* der Punkte ξ für die Schiebungsgruppen S_2^r bzw. S_2^l bezeichnen. Die Zielgerade insbesondere des Ursprungs O_0, *Hauptzielgerade* genannt, trägt die Punkte

$$\mu_u = \sum_1^5 \mu_i e_i, \qquad \nu_u = \sum_1^5 \nu_k e_k. \tag{136}$$

Die Gleichung $[\mu\nu] = 0$ drückt dann aus, daß die *Zielgeraden* der Raumpunkte ξ *für eine zweigliedrige Schiebungsgruppe* S_2^r *oder* S_2^l *stets dem Hauptkomplexe angehören.*

Die analytische Darstellung der beiden Gruppen ist

$$S_2^r\colon\ \xi' = \xi\mu\nu, \tag{137^r}$$

$$S_2^l\colon\ \xi' = \mu\nu\xi, \tag{137^l}$$

wobei

$$\mu = t\mu_0 e_0 + \sum_1^5 \mu_i e_i, \qquad \nu = s\,\nu_0 e_0 + \sum_1^5 \nu_k e_k$$

bedeutet und zufolge $[\mu\nu] = 0$

$$\mu\nu = \nu\mu \tag{138}$$

ist.

Als Bahnflächen der Punkte des Raumes I_5 ergibt sich ein System von ∞^3 Ebenen (137), deren jede gegen die volle Gruppe S_2^r bzw. S_2^l invariant ist. Diese Ebenen sind daher paarweise windschief und überdecken den I_5 einfach und lückenlos. *Ihre Ferngeraden*, vorhin Zielgeraden ihrer Punkte genannt, *liegen in einer Ebene des Hauptkomplexes*, der Verbindungsebene des absoluten Punktes O_3 etwa mit der Hauptzielgeraden. Wir nennen diese Komplexebene die *Leitebene* λ der Schiebungsgruppe S_2^r bzw. S_2^l. Die Leitebene λ bestimmt als Achse ein Bündel von ∞^2 R_3, festgelegt [vgl. (120)] durch die Gleichungen

$$\begin{cases} [\xi\mu] = c_1\xi_0, \\ [\xi\nu] = c_2\xi_0. \end{cases} \tag{139}$$

Die Punkte dieses R_3 haben parallele Bahnebenen und besitzen daher auf der Leitebene λ dieselbe Zielgerade. Dabei ist die Beziehung zwischen dem R_3-Bündel und dem Felde der Zielgeraden eine *korrelative*. Es liegt somit im *System der* ∞^3 *Bahnebenen* der zweigliedrigen Schiebungsgruppen S_2^r, S_2^l eine einfache mehrdimensionale Verallgemeinerung des parabolischen Strahlnetzes eines R_3 vor, weshalb wir dieses System ein *parabolisches Rechtsnetz bzw. Linksnetz von Ebenen* nennen wollen.

Uns wird besonders der *Sonderfall* interessieren, wo für eine Gruppe von *Linksschiebungen* S_2^l *sämtliche Bahnebenen Komplexebenen* sind. Dies tritt für

$$\mu_3 = \nu_3 = 0 \tag{140}$$

ein. In diesem Falle ist eine Gerade g der Leitebene λ für alle Punkte ihres Null-R_3 Zielgerade. Die oben genannte korrelative Zuordnung ist jene des Nullsystems des Hauptkomplexes. Die Hauptzielgeraden gehören dem R_3 (128) an. Durch Lies zweite Abbildung entsprechen diesen Gruppen von Linksschiebungen S_2^l solche Gruppen G_2^l im Raume I_3, bei welchen sämtliche Flächenelemente gewisse zweifach ausgedehnte Vereine, hier *Elementarvereine* genannt, in einer dem Sinne der Geometrie des isotropen Raumes nach gleichmäßigen Weise beschreiben. Sie sind es, welche im letzten Kapitel herangezogen werden sollen.

42. Die *Klassifikation* der Gruppen G_2^r und G_2^l nach affin-äquivalenten Typen kann nach unseren früheren Ergebnissen (Kapitel VI) wieder an Hand der *Lage der Leitebene* λ der zugehörigen Schiebungsgruppe S_2^r und S_2^l *gegen den absoluten Kegel* Γ_3^2 (78) *des isotropen* I_5 *und seine ausgezeichneten Komplexebenen* ε_{12}, ε_{45} (110) vorgenommen werden. Wir können uns bei der Beschreibung der möglichen *sechs Typen* kurz fassen und begnügen uns hier, mit Rücksicht auf spätere Anwendungen, mit der Beschreibung der möglichen Gruppen G_2^l.

I. Die *Leitebene* λ schneidet den Kegel Γ_3^2 nach zwei verschiedenen Mantellinien, ist also eine *Komplexebene allgemeiner Lage* durch den absoluten Punkt O_3. Es ist

$$(\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1)(\mu_4 \nu_5 - \mu_5 \nu_4) \neq 0$$

und (wie im folgenden stets)

$$[\mu\nu] = 0. \tag{135}$$

Man kann wählen:

$$(\mu\mu) = 0, \quad (\nu\nu) = 0,$$

wobei bedeutet:

$$(\mu\mu) = \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_5.$$

Dieser *Haupttyp* einer Gruppe G_2^l kann als kommutatives Produkt zweier Gruppen G_1^l der Art $\boldsymbol{L}_{\mathrm{II}}$ dargestellt werden. Die Flächenelemente des Raumes I_3 beschreiben sowohl mit ihren Punkten wie mit ihren Ebenen jeweils *koachsiale Paraboloide* vollisotroper Durchmesserrichtung, die überdies sämtlich untereinander kongruent sind und (im Sinne der Geometrie von I_3) gleichförmig durchlaufen werden.

Im *Sonderfall* (140), wo $\mu_3 = \nu_3 = 0$ ist, fallen Punkt- und Ebenenort zusammen. *Die Flächenelemente beschreiben gleichförmig* (*als Punkte und Tangentialebenen*) *ein System von* ∞^3 *kongruenten Paraboloiden.*

II. Die *Leitebene* λ *berührt* den Kegel Γ_3^2 längs einer der Ebene ε_{12} angehörenden Mantellinie. Man kann dann $\mu_4 = \mu_5 = 0$ wählen.

G_2^l ist kommutatives Produkt einer Gruppe $\boldsymbol{L}_{\mathrm{IV}}$ und $\boldsymbol{L}_{\mathrm{I}}$. Die Punkte der Flächenelemente beschreiben *parabolische Zylinder*, welche die absolute Ebene im absoluten Punkte berühren, die Ebenen bilden das System der Tangentialebenen einer Translationsschar ebensolcher parabolischer Zylinder.

Im *Sonderfalle* (140) gleiten die Flächenelemente berührend an *parabolischen Zylindern.*

III. Die *Leitebene* λ *berührt* den Kegel Γ_3^2 längs einer der Ebene ε_{45} angehörenden Mantellinie. Mann kann dann $\mu_1 = \mu_2 = 0$ wählen.

G_2^l ist Produkt einer Gruppe $\boldsymbol{L}_{\mathrm{III}}$ und $\boldsymbol{L}_{\mathrm{I}}$. Die Punkte der Flächenelemente beschreiben gleichförmig parallele isotrope Ebenen. Ihre Ebenen umhüllen jeweils einen parabolischen Kreis, dessen Ebene parallel zu den eben genannten ist.

Im *Sonderfalle* (140) entstehen die Systeme berührender Flächenelemente von kongruenten *parabolischen Kreisen.*

IV. Die *Leitebene* λ *ist eine erzeugende Ebene* jener (ε_{12} und ε_{45} nicht enthaltenden) Schar von Γ_3^2, welche vollständig dem Hauptkomplexe angehört. Man kann

$$\mu_4 = \mu_5 = \nu_1 = \nu_2 = 0$$

wählen.

G_2^l ist Produkt einer Gruppe $\boldsymbol{L}_{\mathrm{III}}$ und $\boldsymbol{L}_{\mathrm{IV}}$. Die Translationsrichtung der letzten ist zu der Fixebene π, die mit jedem Punkte der ersten Gruppe gegenüber Translationen invariant verbunden ist, parallel. Die Punkte der Flächenelemente beschreiben i. a. *parallele Ebenen*, ihre Ebenen beschreiben ∞^1 Büschel, deren parallele Achsen in den Ebenen π liegen.

Im *Sonderfalle* (140) werden Systeme von Flächenelementen entstehen, deren Punkte und Ebenen jeweils solchen *Geraden* angehören, *die zu einer festen isotropen Ebenenstellung parallel sind.*

V. Die *Leitebene* λ fällt mit der *ausgezeichneten erzeugenden Ebene* ε_{45} von Γ_3^2 zusammen. Man kann

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_5 = \nu_1 = \nu_2 = \nu_4 = 0$$

wählen.

G_2^l ist Produkt zweier Gruppen $\boldsymbol{L}_{\mathrm{III}}$. Jedem Punkte ist translationsinvariant eine vollisotrope Gerade g zugeordnet. Während der Punkt eines Flächenelementes zweigliedrig in vollisotroper Richtung verschoben wird, dreht sich seine Ebene um ihren Schnittpunkt mit der ihm zugeordneten Geraden g.

Im *Sonderfalle* (140) liegt der Punkt auf der zugeordneten Geraden, es liegt die Gruppe G_2^l der *Elementendrehungen* vor.

VI. Die *Leitebene* λ fällt mit der *erzeugenden Ebene* ε_{12} des Kegels Γ_3^2 zusammen. Man kann

$$\mu_2 = \mu_4 = \mu_5 = \nu_1 = \nu_4 = \nu_5 = 0$$

wählen.

G_2^l ist Produkt zweier Gruppen $\boldsymbol{L}_{\mathrm{IV}}$. Die Punkte der Flächenelemente beschreiben Ebenen, die Ebenen zweigliedrig ein Parallelebenenbüschel.

Im *Sonderfalle* (140) erhält man die Gruppe G_2^l der *Elementenschiebungen.*

43. Es liegt auf der Hand, daß sich auch im isotropen I_5, ähnlich wie dies im I_3 geschehen ist, auf die beiden Schiebungsgruppen S_5^r, S_5^l ebenfalls zweierlei Begriffe des *Cliffordschen Parallelismus* gründen lassen, welche wieder zu einer *Abbildung der Raumgeraden auf Strahlenpaare eines Bündels* führen. Es treten dabei einfach an Stelle der aus den Gleichungen (50) fließenden Formeln (51) des I_3 im Raum I_5 die in gleicher Weise aus den Gleichungen (115) zu gewinnenden Abbildungsformeln. Es ist wohl nicht nötig, dies ausführlicher durchzuführen oder die einfache Theorie der erwähnten Abbildung auseinanderzusetzen.

Es ist jedoch für spätere Zwecke von Vorteil, der mit der Abbildung verknüpften *ausgezeichneten linearen Komplexe* des isotropen I_5 Erwähnung zu tun. Es sind dies die *Rechtskomplexe*:

$$(141^r) \quad u_1 p_{01} + u_2 p_{02} + u_3[p_{03} - \tfrac{1}{2}(p_{14} + p_{25})] + u_4 p_{04} + u_5 p_{05} = 0$$

und die *Linkskomplexe*

$$(141^l) \quad v_1 p_{01} + v_2 p_{02} + v_3[p_{03} + \tfrac{1}{2}(p_{14} + p_{25})] + v_4 p_{04} + v_5 p_{05} = 0.$$

Unter den Linkskomplexen kommt der Hauptkomplex (104) vor. Wichtig ist der Satz:

Jeder Rechtskomplex gestattet alle Linksschiebungen, jeder Linkskomplex alle Rechtsschiebungen.

Ein Links- und Rechtskomplex liegen stets in Involution.

VIII. Eine Übertragung der Sätze von Kasner, Scheffers und Cesàro auf den Raum.

44. Von F. P. Smith [5]) rühren räumliche Analoga her der bekannten Sätze von Cesàro [7]) und G. Scheffers [8]) über die Krümmungskreise der Isogonalkurven und Äquitangentialkurven einer ebenen Kurvenschar. Bei diesen Smithschen Sätzen tritt an Stelle der ebenen Kurvenschar das System der *Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung* erster Ordnung $f = 0$, an Stelle der Isogonal- und Äquitangentialkurven treten die Charakteristiken jener ∞^2 partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F = 0$, deren Flächenelemente aus denen von $f = 0$ durch die Gruppen G_2' der *Elementendrehungen* bzw. *Elementenschiebungen* hervorgehen. An Stelle der Krümmungskreise treten die *oskulierenden Elementarstreifen* dieser Charakteristiken, über welche schließlich die Smithschen Sätze interessante Aussagen machen können.

Es gibt nun in der Ebene einen *allgemeinen*, von E. Kasner [6]) stammenden *Satz*, welcher jene von Cesàro und Scheffers als *Sonderfälle* gleichzeitig umfaßt. Man wird daher vermuten, daß *eine ähnliche Erweiterung auch der Smithschen Sätze im Raume möglich* wäre. Dies ist in der Tat der Fall, freilich nicht in dem vollen Umfange, wie es von der Ebene her zu erwarten wäre. Um so mehr Interesse wird man dem schließlichen Resultate zubilligen dürfen, zu dessen Herleitung uns die bisher bereitgestellten gruppentheoretischen Behelfe dienlich sein werden.

45. Wir erklären vorerst als zwei *oskulierende Streifen* solche, deren zweite Liesche Bilder einander in einem gemeinsamen Punkte *berührende* Kurven des Hauptkomplexes sind. Zwei derartige Streifen haben zwei benachbarte, vereinigte Flächenelemente (T, τ), (T', τ'), ein Kowalewskisches Streifenelement [16]), gemeinsam, welches zugleich gewissen ∞^1 *Flächenelementen zweiter Ordnung* angehört. Diese haben nun in der Richtung $t = [T\,T']$ dieselbe Normalkrümmung (dieselbe Meusnierkugel), in der konjugierten Richtung $\bar{t} = [\tau\tau']$ dieselbe Mannheimkugel [17]), wodurch die Berechtigung der Ausdrucksweise „oskulierende" Streifen gegeben ist. Da im Raume I_5 jede (analytische) Kurve des Hauptkomplexes an jeder Stelle einen Komplexstrahl als Tangente besitzt, gibt es im I_3 *an jeder regulären Stelle eines (analytischen) Streifens eindeutig einen oskulierenden Elementarstreifen* (im Sinne von **33.**)

46. Den ∞^4 der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \tag{142}$$

genügenden Flächenelementen entsprechen durch Lies zweite Abbildung im Raume I_5 die Punkte einer *Hyperfläche* Φ_4

$$\Phi(\xi_i) = 0. \tag{143}$$

Diese hat in jedem ihrer Punkte ξ einen *Tangential-R_4* τ und hinsichtlich des Hauptkomplexes einen *Null-R_4* ν, welche sich in einem durch ξ gehenden *Komplex-R_3* schneiden. Dieser Komplexraum trägt ein Büschel von (Φ_4 in ξ berührenden) Komplexebenen, dessen Achse die zum R_3 nullpolare Gerade g ist. Wir nennen diesen in jedem Punkte ξ von Φ_4 ausgezeichneten, Φ_4 berührenden Komplexstrahl g mit Smith die *Nullachse* von Φ_4 in ξ. Durch die Nullachsen ist in jedem Punkte der Φ_4 ein berührendes Linienelement gegeben. Deren ∞^3 Integralkurven, kurz *Nullkurven* von Φ_4 genannt, sind

---

[16]) G. Kowalewski, Elementvereine und Streifenelemente im R_{n+1}, Berichte d. Kgl. sächs. Ges. d. Wiss. **52** (1900), S. 91—104.

[17]) A. Mannheim, Géométrie cinématique, Paris 1894, S. 158. Vgl. E. Müller-J. Krames, Konstruktive Behandlung der Regelflächen, Leipzig-Wien 1931, S. 31 (Fußnote).

nun *die Lieschen Bilder der charakteristischen Streifen der partiellen Differentialgleichung* (142).

Eine Integralfläche von (142) bildet sich nämlich auf eine solche Fläche Φ_2 von Φ_4 ab, deren sämtliche Tangentialebenen Komplexebenen sind (Komplexfläche). Die Tangentialebene eines Punktes ξ von Φ_2 enthält also (als berührende Komplexebene auch von Φ_4) sicher die Nullachse von ξ. Somit ist *jede solche Fläche* Φ_2 auf Φ_4 mit einem Feld von Linienelementen überdeckt, die Nullachsen angehören, und *trägt* daher *ein System von* ∞^1 *Nullkurven*. Dies ist für die Flächen Φ_2 auch charakteristisch. Haben zwei Komplexflächen Φ_2, Φ_2' einen Punkt ξ gemeinsam, so auch die durch ihn gehende Nullkurve. Die Nullkurven von Φ_4 sind somit in der Tat die Lieschen Bilder der charakteristischen Streifen von (142). Die *Nullachsen* selbst sind nun die Lieschen Bilder der die charakteristischen Streifen *oskulierenden Elementarstreifen*.

Bezüglich des Hauptkomplexes (104) ist zu Φ_4 *polar* eine zweite Hyperfläche $\bar{\Phi}_4$. Sie wird gebildet von den Nullpunkten $\bar{\xi}$ des Tangenten-R_4 τ der Punkte ξ von Φ_4. Der Tangential-R_4 τ von Φ_4 in ξ ist also zugleich Null-R_4 $\bar{\nu}$ von $\bar{\xi}$ auf $\bar{\Phi}_4$, also $\tau = \bar{\nu}$. Umgekehrt ist ξ der Nullpunkt des Tangenten-R_4 $\bar{\tau}$ von $\bar{\Phi}_4$ in $\bar{\xi}$. Der Tangential-R_4 $\bar{\tau}$ von $\bar{\Phi}_4$ in $\bar{\xi}$ ist Null-R_4 ν von ξ, also $\nu = \bar{\tau}$. Die Beziehung zwischen den Punkten ξ und $\bar{\xi}$ der polaren Hyperflächen Φ_4 und $\bar{\Phi}_4$ ist also völlig wechselseitig. Wir nennen die Punkte ξ und $\bar{\xi}$ *konjugiert*. Die Schnitt-R_3 $[\tau\nu]$ und $[\bar{\tau}\bar{\nu}]$ fallen zusammen, ihre Polargeraden, nämlich die *Nullachsen von* Φ_4 *in* ξ *und von* $\bar{\Phi}_4$ *in* $\bar{\xi}$ *sind identisch. Die Nullkurven von* Φ_4 *und von* $\bar{\Phi}_4$ *haben das System ihrer* ∞^4 *Tangenten gemeinsam.* Deuten wir diesen Sachverhalt nach Liescher Abbildung im Raume I_3, so folgt das Smithsche Theorem:

Die ∞^4 *oskulierenden Elementarstreifen der charakteristischen Streifen* Σ *einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* ($f = 0$) *oskulieren auch die charakteristischen Streifen* $\bar{\Sigma}$ *einer zweiten solchen partiellen Differentialgleichung* ($\bar{f} = 0$), *die zur ersten polar* (bei Smith: *konjugiert*) heißt. Flächenelemente ξ, $\bar{\xi}$ auf den Streifen Σ, $\bar{\Sigma}$, welche dabei Berührungselemente des gleichen Elementarstreifens sind, nennen wir *konjugiert*. Die Beziehung zwischen polaren Gleichungen $f = 0$, $\bar{f} = 0$ und zwischen ihren konjugierten Flächenelementen ξ, $\bar{\xi}$ ist involutorisch. Natürlich kann (142) zu sich selbst konjugiert sein. Dann ist Φ_4 selbstpolar und mit $\bar{\Phi}_4$ identisch.

47. Wir formulieren nun den Sachverhalt, der in zwei Sonderfällen die oben genannten Smithschen räumlichen Analoga zu den ebenen Sätzen von Cesàro und Scheffers umfaßt und den man als weitest mögliches Analogon des Kasnerschen Satzes der Ebene anzusehen hat.

Es seien $f = 0$ (142) eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung und Σ ihre charakteristischen Streifen. Üben wir auf alle ∞^4 Flächenelemente ξ von f eine *zweigliedrige Gruppe* G_2^l *von Linksbewegungen* des isotropen Raumes I_3 aus, etwa (bei kanonischer Darstellung) die Gruppe

$$(144)\qquad \begin{cases} \xi' = \gamma\xi, \\ \gamma = e_0 + \sum_1^5 (\mu_i s + \nu_i t)\, e_i, \\ [\mu\nu] = 0, \end{cases}$$

so entstehen, den Parameterpaaren s, t entsprechend, ∞^2 Systeme von je ∞^4 Flächenelementen ξ', welche je einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $f_{st} = 0$ genügen. Deren charakteristische Streifen seien Σ_{st}. Wir denken uns nun die ∞^2 Flächen-

elemente $\xi^{*\prime} = \gamma\xi^*$, welche aus einem beliebigen, aber *festen* Flächenelement ξ^* von $f = 0$ durch die ∞^2 Transformationen von G_2^l hervorgehen, und fassen die durch sie hindurchgehenden charakteristischen Streifen Σ_{st}^* der jeweiligen Gleichung $f_{st} = 0$ ins Auge. Von diesen zeigen wir:

Dann und nur dann, wenn die Gruppe G_2^l von der Sonderart ist, daß $\mu_3 = \nu_3 = 0$ ist, daß also, geometrisch ausgedrückt, alle Flächenelemente bei ihr (in gleichförmiger Weise) zweifache Elementarvereine beschreiben, dann und nur dann besitzen die charakteristischen Streifen Σ_{st}^* in ihren Flächenelementen $\xi^{*\prime} = \gamma\xi^*$ oskulierende Elementarstreifen, welche gleichzeitig zwei wohlbestimmte, im Sinne der Grenzgruppe G_5^r von I_3 bewegungskongruente zweifache Elementarvereine $V_2^{\xi^*}$ und $V_2^{\bar{\xi}^*}$ berühren. $V_2^{\xi^*}$ ist dabei einfach jener zweifacher Elementarverein, den das Flächenelement ξ^* bei der Gruppe G_2^l beschreibt. $V_2^{\bar{\xi}^*}$ dagegen ist jener Elementarverein, den das zum Flächenelemente ξ^* von $f = 0$ konjugierte (der polaren Gleichung $\bar{f} = 0$ genügende) Flächenelement $\bar{\xi}^*$ bei eben dieser Gruppe G_2^l beschreibt. Dabei sind die Bewegungsprozesse von ξ^* auf $V_2^{\xi^*}$ und von $\bar{\xi}^*$ auf $V_2^{\bar{\xi}^*}$ zueinander invers.

48. Der *Beweis* kann sehr übersichtlich im Lieschen Bildraum I_5 geführt werden, wobei sich sehr deutlich die genaue Analogie mit einem von mir früher gegebenen Beweise für die kugelgeometrischen Formulierungen der Sätze von Kasner, Scheffers und Cesàro ergibt [18]).

Im Raume I_5 liegt nämlich folgendes vor: Gegeben ist, der partiellen Differentialgleichung (142) entsprechend, eine *Hyperfläche* Φ und darauf, deren Charakteristiken Σ entsprechend, das System der ∞^3 *Nullkurven* N des Hauptkomplexes. Gegeben ist ferner, der Gruppe G_2^l entsprechend, eine zunächst allgemeine zweigliedrige Gruppe von Linksschiebungen S_2^l des I_5 von der Darstellung (144), durch deren Transformationen Φ der Reihe nach in ∞^2 neue Lagen Φ_{st} gelangt.

Fixieren wir nun einen Punkt ξ^* auf Φ und die ihm entsprechenden ∞^2 Punkte $\xi^{*\prime} = \gamma\xi^*$ auf den Hyperflächen Φ_{st}. Es haben die ∞^2 Flächen Φ_{st} an den Stellen $\xi^{*\prime}$ *Nullachsen*. Wir werden zeigen können, daß diese ∞^2 Nullachsen sich zu je ∞^1 auf die erzeugenden Ebenen eines *Kegels zweiter Ordnung* in einem gewissen R_4 von I_5 verteilen. Ferner werden wir zeigen, daß nur dann, wenn für die Gruppe S_2^l $\mu_3 = \nu_3 = 0$ ist, dieser Kegel unter seinen Leitebenen *zwei Komplexebenen* besitzt, nämlich erstens jene Ebene ε^{ξ^*}, die der Punkt ξ^* bei dieser Gruppe S_2^l durchläuft, und zweitens jene Ebene $\varepsilon^{\bar{\xi}^*}$, die der auf seiner Nullachse gelegene zu ihm konjugierte Punkt $\bar{\xi}^*$ bei $(S_2^l)^{-1}$ beschreibt. Die Bilder dieser Nullachsen sind aber genau die in unserem Satze vorkommenden ∞^2 oskulierenden Elementarstreifen der durch die Flächenelemente $\xi^{*\prime}$ legbaren Charakteristiken der Gleichungen $f_{st} = 0$. Weil nun die Nullachsen zwei feste Komplexebenen schneiden, berühren die oskulierenden Elementarstreifen wirklich zwei bestimmte zweifache Elementarvereine $V_2^{\xi^*}$, $V_2^{\bar{\xi}^*}$, jene nämlich, die das Flächenelement ξ^* von f bei G_2^l und das zu ihm konjugierte Flächenelement $\bar{\xi}^*$ von $\bar{f}$ bei $(G_2^l)^{-1}$ beschreibt.

49. Zum *Beweis* genügt es nun anzunehmen, daß der beliebige, aber feste Punkt ξ^* auf Φ mit dem Koordinatenanfang zusammenfalle, also $\xi^* = e_0$ sei. Dieser beschreibt

[18]) K. Strubecker, Zur Geometrie sphärischer Kurvenscharen, Jahresber. Dtsch. Math. Ver. **44** (1934), S. 184 bis 198.

bei den Linksschiebungen der Gruppe S_2^l die Ebene ε^{ξ^*}, enthaltend die Punkte $\xi^{*\prime} = \gamma$, d. s. explizite die Punkte

$$(145) \qquad \begin{cases} x_0 = 1, \\ x_i = \mu_i s + \nu_i t \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5). \end{cases}$$

Der Tangential-R_4 τ von Φ im Punkte $\xi^* = e_0$ hat dann eine Gleichung der Form

$$(146) \qquad \tau \equiv \sum_1^5 \tau_i \xi_i = 0.$$

Sein Nullpunkt im Hauptkomplex, zugleich der zu ξ^* auf $\bar{\Phi}$ *konjugierte Punkt* $\bar{\xi}^*$, ist

$$(147) \qquad \bar{\xi}^* \equiv (\tau_3,\ 2\tau_4,\ 2\tau_5,\ 0,\ -2\tau_1,\ -2\tau_2).$$

Die Gerade $[\xi^*\bar{\xi}^*]$ ist die *Nullachse* der Hyperflächen Φ in ξ^* und $\bar{\Phi}$ in $\bar{\xi}^*$. Es ist leicht, den *Zusammenhang* der Punkte $\xi^{*\prime}$ und $\bar{\xi}^{*\prime}$ anzugeben. Unterwerfen wir zunächst den Punkt ξ^* der Gruppe S_2^l, so entsteht die *Bahnebene* ε^{ξ^*} (145). Der mit ihm verbundene Tangential-R_4 τ von Φ bleibt dabei in den einzelnen Lagen von ξ^* stets Tangential-R_4 der zugehörigen Fläche Φ_{st}. Er dreht sich also ebenfalls um eine *Bahnebene* ε^τ von S_2^l. Sein Nullpunkt $\bar{\xi}^*$ durchläuft daher ebenfalls eine *Ebene* $\varepsilon^{\bar{\xi}^*}$, die *nullpolare Ebene von* ε^τ. *Die Ebenen* ε^{ξ^*} *und* $\varepsilon^{\bar{\xi}^*}$ *sind dabei durch entsprechende Punkte* $\xi^{*\prime}$, $\bar{\xi}^{*\prime}$ *in kollinearer Weise aufeinander bezogen.*

50. Diese Kollineation läßt sich auffassen als ein gewisser *Ausschnitt* einer auf den ganzen Raum I_5 ausgedehnten Kollineation, wenn man so überlegt: Es gibt einen einzigen *Rechtskomplex* [vgl. (141^r)], welcher dem Punkte $\xi^* = e_0$ den Tangential-R_4 τ (146) als Null-R_4 zuordnet. Seine Gleichung ist

$$(148) \qquad \tau_1 p_{01} + \tau_2 p_{02} + \tau_3 [p_{03} - \tfrac{1}{2}(p_{14} + p_{25})] + \tau_4 p_{04} + \tau_5 p_{05} = 0.$$

Dieser Rechtskomplex gestattet alle Linksschiebungen und ordnet daher den Punkten $\xi^{*\prime}$ von ε^{ξ^*} genau die oben konstruierten Tangential-R_4 τ' von Φ_{st} als Null-R_4 zu.

Das Produkt der Nullsysteme des Rechtskomplexes (148) und des dazu involutorischen Hauptkomplexes (104) ist eine *involutorische Kollineation* $\mathfrak{T}$ des Raumes I_5:

$$(149) \qquad \begin{cases} \bar{\xi}_0 = \tau_3 \xi_0 \\ \bar{\xi}_1 = 2\tau_4 \xi_0 - \tau_3 \xi_1 \\ \bar{\xi}_2 = 2\tau_5 \xi_0 \qquad - \tau_3 \xi_2 \\ \bar{\xi}_3 = \qquad \tau_1 \xi_1 + \tau_2 \xi_2 + \tau_3 \xi_3 + \tau_4 \xi_4 + \tau_5 \xi_5 \\ \bar{\xi}_4 = -2\tau_1 \xi_0 \qquad\qquad - \tau_3 \xi_4 \\ \bar{\xi}_5 = -2\tau_2 \xi_0 \qquad\qquad\qquad - \tau_3 \xi_5, \end{cases}$$

die wir matrizenmäßig so schreiben können:

$$(149') \qquad \bar{\xi} = \mathfrak{T}\xi.$$

Die involutorische Kollineation $\mathfrak{T}$ besitzt an *Doppelpunkten* eine durch den absoluten Punkt O_3 des isotropen I_5 gehende *Gerade* Δ_1, darstellbar als Schnitt der ∞^4 R_4 des Linearbündels:

$$(150) \qquad \begin{Vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_4 & \xi_5 \\ \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & -\tau_1 & -\tau_2 \end{Vmatrix} = 0,$$

und einen dazu windschiefen, zu Δ_1 bezüglich der Komplexe (148) und (104) zugleich polaren R_3 namens Δ_3, der dem absoluten R_4 $\xi_0 = 0$ angehört und lautet:

$$(151) \qquad \Delta_3 \qquad \begin{cases} \xi_0 = 0, \\ \sum_1^5 \tau_i \xi_i + \tau_3 \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Δ_1 und Δ_3 sind die Achsen der windschiefen harmonischen Kollineation $\mathfrak{T}$, die wir kürzer als eine *windschiefe Involution* bezeichnen.

Diese windschiefe Involution $\mathfrak{T}$ ordnet nun jedem Punkt $\xi^{*\prime}$ aus ε^{ξ^*} genau den konjugierten Punkt $\bar{\xi}^{*\prime}$ auf $\varepsilon^{\bar{\xi}^*}$ zu. $\mathfrak{T}$ *vermittelt also die kollineare Beziehung dieser beiden Ebenen.*

51. Es werde nun der im I_5 beliebig gewählte Punkt ξ durch eine allgemeine Linksschiebung $\mathfrak{L}$ nach ξ' verschoben, so daß

$$(152) \qquad \xi' = \gamma \xi$$

oder bei Verwendung von Matrizen

$$(153) \qquad \xi' = \mathfrak{L} \xi$$

ist. Wir suchen die zu diesen Punkten ξ, ξ' in der windschiefen Involution (149) konjugierten Punkte $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$ und fragen nach deren Zusammenhang. Zunächst ist sicher

$$(154) \qquad \bar{\xi}' = \mathfrak{T} \mathfrak{L} \mathfrak{T}^{-1} \bar{\xi}.$$

Für die Matrix $\mathfrak{T}\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-1}$ findet man leicht

$$(155) \qquad \mathfrak{T}\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & 0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_4 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 & 0 \\ -\gamma_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte $\bar{\xi}$ und $\bar{\xi}'$ hängen also ebenfalls durch eine bestimmte Linksschiebung $\bar{\gamma}$ zusammen. Es ist

$$(156) \qquad \bar{\xi}' = \bar{\gamma} \bar{\xi},$$

wobei

$$(156') \qquad \bar{\gamma} = \gamma_0 e_0 - \gamma_1 e_1 - \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 - \gamma_4 e_4 - \gamma_5 e_5.$$

Es ist bemerkenswert, daß diese Linksschiebung schließlich völlig *unabhängig* von dem Rechtskomplexe (148) und dem speziellen Tangential-R_4 τ (146) der Hyperfläche Φ im Punkte $\xi = e_0$ ist. Somit *gilt ganz allgemein, daß sich die auf den gemeinsamen Nullachsen der polaren Hyperflächen Φ, $\bar{\Phi}$ gelegenen konjugierten Punkte ξ, $\bar{\xi}$ derart verhalten, daß bei einer Linksschiebung γ (152) von ξ der konjugierte $\bar{\xi}$ die Linksschiebung $\bar{\gamma}$ (156) erfährt.* Die Beziehung ist natürlich wieder wechselseitig.

52. In dem *Sonderfalle*, wo $\gamma_3 = 0$ ist, sind diese Schiebungen γ und $\bar{\gamma}$ *invers.* Identifizieren wir dann die Linksschiebung γ mit den Transformationen der Gruppe S_2' (144), wobei wir, $\gamma_3 = 0$ entsprechend,

$$(157) \qquad \mu_3 = \nu_3 = 0$$

wählen, so gilt für *jeden* Punkt ξ auf Φ und seinen konjugierten $\bar{\xi}$ auf $\bar{\Phi}$, insbesondere also auch für die oben ins Auge gefaßten besonderen Punkte $\xi^* = e_0$ und seinen konjugierten $\bar{\xi}^*$ folgender Satz:

ξ und $\bar{\xi}$ durchlaufen in inverser Weise je eine Bahnebene ε^{ξ}, $\varepsilon^{\bar{\xi}}$ der zweigliedrigen Schiebungsgruppe S_2'. Diese Bahnebenen sind Komplexebenen des Hauptkomplexes.

53. Im Raume I_3 geben diese Sätze nach Liescher Abbildung folgendes: Unterwirft man die Flächenelemente ξ einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $f = 0$ einer Linksbewegung $\mathfrak{L}$ ($\gamma_3 = 0$) aus G_5^l, so erfahren die zu ihnen konjugierten Flächenelemente $\bar{\xi}$ der polaren Differentialgleichung $\bar{f} = 0$ die *inverse* Linksbewegung $\mathfrak{L}^{-1}$.

Erleidet das Flächenelement ξ von $f = 0$ die Transformation $\mathfrak{L}$ einer zweigliedrigen Gruppe G_2^l von Linksbewegungen der besonderen Art $\mu_3 = \nu_3 = 0$, so erfährt das konjugierte Element $\bar{\xi}$ auf $\bar{f} = 0$ die inverse Transformation $\mathfrak{L}^{-1}$ derselben Gruppe G_2^l. Die ∞^2 neuen Lagen $\xi', \bar{\xi}'$ der Flächenelemente $\xi, \bar{\xi}$ genügen dann den partiellen Differentialgleichungen $f_{st} = 0$, $\bar{f}_{st} = 0$, und deren Charakteristiken $\mathbf{\Sigma}_{st}, \bar{\mathbf{\Sigma}}_{st}$ besitzen an den Stellen $\xi', \bar{\xi}'$ dieselben oskulierenden Elementarstreifen. Diese ∞^2 Elementarstreifen berühren jeweils jene beiden zweifachen Elementarvereine $V_2^{\xi}, V_2^{\bar{\xi}}$, welche bei der Gruppe G_2^l von den konjugierten Flächenelementen $\xi, \bar{\xi}$ (in inverser Weise) beschrieben werden. Unabhängig von der (innerhalb $f = 0$ und $\bar{f} = 0$) getroffenen Wahl von ξ und $\bar{\xi}$ sind alle diese Hüllflächen $V_2^{\xi}, V_2^{\bar{\xi}}$ (als Bahnflächen der Gruppe G_2^l) im Sinne der Gruppe G_3^r bewegungskongruent.

Damit ist ein Analogon zum Kasnerschen Satz der Ebene gefunden. Wir werden zeigen können, daß es wirklich das weitestmögliche ist.

54. Vorerst formulieren wir noch die bei Smith vorhandenen beiden Sonderfälle, welche den ebenen Sätzen von Cesàro und Scheffers entsprechen. Sie ergeben sich erstens für

$$\mu_1 = \mu_2 = (\mu_3) = \mu_5 = 0, \quad \mu_4 = 1$$
$$\nu_1 = \nu_2 = (\nu_3) = \nu_4 = 0, \quad \nu_5 = 1.$$

Die Gruppe G_2^l ist dann jene der *Elementendrehungen*:

$$(158) \qquad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad p' = p + s, \quad q' = q + t,$$

und wir erhalten das Smithsche Analogon zum Cesàroschen Satz:

Dreht man die Flächenelemente der Gleichung $f(x, y, z, p, q) = 0$ vermöge der Gruppe der ∞^2 Elementendrehungen (158) *um ihre Punkte, so genügen die entstehenden Elemente der Gleichung $f_{st} \equiv f(x, y, z, p - s, q - t) = 0$. Die durch einen beliebigen, aber festen Punkt $P(x, y, z)$ legbaren, die ∞^2 Flächenelemente* (158) *enthaltenden Charakteristiken der ∞^2 Gleichungen $f_{st} = 0$ haben dann daselbst oskulierende Elementarstreifen, welche noch einen zweiten festen Punkt $\bar{P}$ gemeinsam haben. Sie oskulieren dort die Charakteristiken der zu $f_{st} = 0$ polaren partiellen Differentialgleichungen $\bar{f}_{st} = 0$.*

Nehmen wir zweitens

$$\mu_2 = (\mu_3) = \mu_4 = \mu_5 = 0 \quad \mu_1 = 1$$
$$\nu_1 = (\nu_3) = \nu_4 = \nu_5 = 0 \quad \nu_2 = 1,$$

so wird die Gruppe G_2^l jene der *Elementenschiebungen*

$$(159) \qquad x' = x + s, \quad y' = y + t, \quad z' = z + sp + tq, \quad p' = p, \quad q' = q.$$

Wir erhalten das Smithsche Analogon zum Satze von Scheffers:

Verschiebt man die Flächenelemente der partiellen Differentialgleichung $f(x, y, z, p, q) = 0$ vermöge der Elementenschiebungen der Gruppe (159) *in ihren Ebenen π, so genügen sie den Gleichungen $f_{st} \equiv f(x - s, y - t, z - sp - tq, p, q) = 0$. Die ∞^2 dabei aus einem beliebigen, aber festen Flächenelement von $f = 0$ entstehenden Elemente* (159) *der Ebene π gehören dann Charakteristiken $\mathbf{\Sigma}_{st}$ von $f_{st} = 0$ an, welche an den Stellen* (159) *oskulierende Elementarstreifen besitzen, die stets noch eine zweite, wohlbestimmte Ebene $\bar{\pi}$*

berühren. Sie oskulieren daselbst die Charakteristiken der zu $f_{st} = 0$ *polaren Gleichungen* $\bar{f}_{st} = 0$.

55. Die Voraussetzung $\gamma_3 = 0$, d. i. $\mu_3 = \nu_3 = 0$, über die Gruppe G_2^l von Linksbewegungen $\mathfrak{L}$ (144) war *hinreichend* dafür, ein räumliches Analogon des Kasnerschen Satzes herleiten zu können. Jetzt werden wir zeigen, daß diese Bedingung wirklich auch *notwendig* ist, daß also das bisher angegebene Analogon tatsächlich die weitest mögliche Übertragung des Kasnerschen Satzes darstellt.

Es ist dies deshalb sehr *merkwürdig*, weil der allgemeine, von der Ebene (wie von der Kugel) her zu erwartende Satz der wäre, daß, falls man die Flächenelemente ξ von $f = 0$ einer ganz beliebigen Gruppe G_2^l von Linksbewegungen ($\gamma_3 \neq 0$) unterwirft, wodurch sie in je ∞^2 neue Elemente ξ' übergehen, die einer Gleichung $f_{st} = 0$ genügen, *die diese Flächenelemente passierenden Charakteristiken* Σ_{st} *von* $f_{st} = 0$ *dort oskulierende Elementarstreifen hätten, die zwei bestimmte zweifache Elementarvereine* $V_2, \bar{V}_2$ *gleichzeitig berühren*, welche zueinander, ja sogar unabhängig von der Wahl von ξ auch untereinander im Sinne der Gruppe G_5^r bewegungskongruent sind.

Es stellt sich nun heraus, daß der Satz in diesem allgemeinen Umfange *nicht richtig* ist. Er trifft nur dann zu, wenn, wie in unseren früheren Betrachtungen angenommen war, $\gamma_3 = 0$, d. h. $\mu_3 = \nu_3 = 0$ ist.

56. Wäre der Satz nämlich richtig, dann müßten im Raume I_5 die vermöge der windschiefen Involution (149) kollinearen Bahnebenen der Lieschen Bildpunkte ξ^*, $\bar{\xi}^*$ der konjugierten Flächenelemente ξ^*, $\bar{\xi}^*$ der polaren Gleichungen $f = 0$, $\bar{f} = 0$ als Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punkte $\xi^{*\prime}$ $\bar{\xi}^{*\prime}$ solche Komplexstrahlen haben, welche zwei bestimmte Komplexebenen schneiden. Nun sieht man sofort, daß diese ∞^2 Geraden $[\xi^{*\prime}\, \bar{\xi}^{*\prime}]$, welche sämtlich die Achsen Δ_1 und Δ_3 der windschiefen Involution $\mathfrak{T}$ (149) schneiden müßten, einen *Kegel zweiter Ordnung* erzeugen, *der einem bestimmten* R_4 *angehört*. Denn die beiden vermöge $\mathfrak{T}$ kollinearen Bahnebenen ε^{ξ^*}, $\varepsilon^{\bar{\xi}^*}$ von ξ^* und $\bar{\xi}^*$ treffen die Achse Δ_3 (151) in einem gemeinsamen selbstentsprechenden Punkte D. Sie spannen daher bloß einen R_4 auf, und ihr Erzeugnis ist ein darin enthaltener Kegel zweiter Ordnung vom Scheitel D, dessen eine Schar erzeugender Ebenen z. B. entsteht, wenn man auf ε^{ξ^*} oder $\varepsilon^{\bar{\xi}^*}$ die eingliedrige Gruppe der windschiefen Kollineationen des I_5 ausübt, deren Achsen Δ_1 und Δ_3 sind. Die ∞^2 Geraden $[\xi^{*\prime}\, \bar{\xi}^{*\prime}]$ liegen dabei zu je ∞^1 in der anderen Schar (Leitschar) erzeugender Ebenen und bilden darin Strahlbüschel, deren Scheitel auf der Achse Δ_1 liegen.

Sollen nun die ∞^2 Geraden $[\xi^{*\prime}\, \bar{\xi}^{*\prime}]$ zwei Komplexebenen des Hauptkomplexes schneiden, so müßten diese in der ε^{ξ^*} und $\varepsilon^{\bar{\xi}^*}$ enthaltenden Schar erzeugender Ebenen des Kegels vorkommen. Sie könnten also nur den Scheitel D gemeinsam haben und würden einen R_4, nämlich den *Null-*R_4 von D aufspannen. Man findet für den *Kegelscheitel* D die Koordinaten

$$(160) \qquad \begin{cases} \xi_0 = 0, \quad \xi_i = \sum_1^5 a_{ik}\tau_k + \tau_3 a_{i3} \\ a_{ik} = \mu_i\nu_k - \mu_k\nu_i, \quad i = 1, \ldots 5, \end{cases}$$

und für seinen *Null-*R_4 die Gleichung

$$(161) \qquad \begin{aligned} &\sum_1^5 \tau_k(2a_{3k}\xi_0 + a_{4k}\xi_1 + a_{5k}\xi_2 - a_{1k}\xi_4 - a_{2k}\xi_5) \\ &+ \tau_3(a_{43}\xi_1 + a_{53}\xi_2 - a_{13}\xi_4 - a_{23}\xi_5) = 0. \end{aligned}$$

Dieser R_4 enthielte dann natürlich den ganzen Kegel, insbesondere also auch alle Punkte $\xi^{*\prime}$ der erzeugenden Ebene ε^{ξ^*} (145). D. h. es müßten die Punkte (145) die Gleichung (161) befriedigen und zwar, da der Tangential-R_4 τ (146) von Φ in ξ^* beliebig wählbar ist, *identisch* in den τ_k. Dies gibt leicht eine erste Bedingung:

$$\sum_1^5 \tau_k a_{3k} = 0,$$

d. h.

$$a_{3k} = 0$$

oder, wegen der linearen Unabhängigkeit der μ und ν zunächst wirklich

$$\mu_3 = \nu_3 = 0. \tag{157}$$

Die weiteren Bedingungsgleichungen aber sind vermöge der Gruppeneigenschaft von G_2^l

$$[\mu\nu] = 0 \tag{135}$$

von selbst erfüllt.

Wir haben damit tatsächlich die Bedingung (157) für das Bestehen unseres Satzes auch als *notwendig* nachgewiesen.

Eingegangen 5. Juli 1937.

Über ein Minimumproblem der Elementargeometrie.

Von *Eugen Egerváry* in Budapest.

Die folgenden Minimumsätze der Dreiecksgeometrie sind allgemein bekannt [1]):

1. Die Summe der Entfernungen eines Punktes von den Ecken eines gegebenen Dreiecks erreicht ihr einziges Minimum in demjenigen Punkte, von dem aus die Dreiecksseiten unter demselben Winkel $\frac{2\pi}{3}$ erscheinen, falls ein Punkt von dieser Beschaffenheit existiert; dies tritt ein, wenn alle Dreieckswinkel kleiner als $\frac{2\pi}{3}$ sind. Ist jedoch ein Winkel $\geqq \frac{2\pi}{3}$, so ist dessen Scheitel der Minimumpunkt.

2. Die Quadratsumme der Entfernungen von den Ecken erreicht ihr einziges Minimum im Schwerpunkte des Dreiecks.

3. Die größte der drei Entfernungen von den Ecken erreicht ihr einziges Minimum in dem Umkreismittelpunkte, falls dieser Punkt im Inneren des Dreiecks liegt; dies tritt ein, wenn alle Dreieckswinkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind. Ist ein Winkel $\geqq \frac{\pi}{2}$, so ist der Mittelpunkt der längsten Seite der Minimumpunkt.

4. Von allen einbeschriebenen Dreiecken hat das Dreieck der Höhenfußpunkte den kleinsten Umfang, falls der Höhenpunkt im Inneren des gegebenen Dreiecks liegt; dies tritt ein, wenn alle Dreieckswinkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind. Ist ein Winkel $\geqq \frac{\pi}{2}$, so ist das Doppelte der kleinsten Höhe die untere Grenze des Umfanges der Indreiecke.

Vorliegende Arbeit enthält zunächst einige Beiträge zu diesen Ergebnissen; so z. B. die Bestimmung derjenigen Indreiecke, für die die Quadratsumme der Seiten bzw. die größte Seitenlänge ein Minimum wird. Der Hauptzweck der Arbeit ist jedoch, außer einer einheitlichen Behandlung des einschlägigen Materials, die Diskussion eines allgemeineren Problems, welches die oben angeführten Fragen alle als spezielle Fälle umfaßt.

Die genannten Fragen beziehen sich einerseits auf die Entfernungen eines Punktes von den Ecken, andererseits auf die Seiten von Indreiecken. Sind $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Entfernungen eines Punktes P von den Ecken A_1, A_2, A_3 des gegebenen Dreiecks, f_1, f_2, f_3 die Seiten des zu einem beliebigen Punkte P gehörigen Fußpunktdreiecks Q_1, Q_2, Q_3, so

[1]) Bezüglich der Minimumfragen der Dreiecks- sowie Tetraedergeometrie vgl. R. Sturm, Maxima und Minima in der elementaren Geometrie, Leipzig 1910, Über den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten, J. f. Math. **97** (1884), S. 49—61, und Existenzbeweis des Punktes kleinster Entfernungssumme von vier gegebenen Punkten, J. f. Math. **143** (1913), S. 241—249; E. Weißfeld, Sur un problème de minimum dans l'espace, Tohoku Math. Journal **42** (1936), S. 274—280; M. Zacharias, Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, Enzyklopädie der math. Wiss. III. 1. 2, S. 862—1172, wo auch weitere Literaturangaben enthalten sind.

können die Seiten f_i des Fußpunktdreiecks durch die Entfernungen ϱ_i bekanntlich [2]) in folgender Form ausgedrückt werden:

$$f_i = \varrho_i \sin \alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo α_i die Winkel des gegebenen Dreiecks bedeuten.

Da man sich bei den vorliegenden Minimumfragen auf die Betrachtung der Fußpunktdreiecke beschränken kann [3]), so reduziert sich also die Bestimmung von

$$\min \left(\overline{Q_2Q_3}^n + \overline{Q_3Q_1}^n + \overline{Q_1Q_2}^n\right) = \min \sum_i f_i^n$$

(bei beliebigem positiven ganzzahligen n) unmittelbar auf die Bestimmung von

$$\min \left(\sin^n \alpha_1 \cdot \overline{PA_1}^n + \sin^n \alpha_2 \cdot \overline{PA_2}^n + \sin^n \alpha_3 \cdot \overline{PA_3}^n\right) = \min \sum_i \varrho_i^n \sin^n \alpha_i .$$

Da endlich auch die in den Minimumfragen von Tschebitscheffschem Charakter auftretende Größe $\max(u_1, u_2, u_3)$ die bekannte Darstellung

$$\max(u_1, u_2, u_3) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + u_3^n} \qquad (u_i \geqq 0)$$

zuläßt, so erkennt man, daß alle vorhergehenden Fragen spezielle Fälle des folgenden Problems sind:

Es seien ein nicht ausgeartetes Dreieck $A_1A_2A_3$, die positiven Gewichte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und ein beliebiger positiver ganzzahliger Exponent n gegeben. Zu bestimmen ist derjenige Punkt P_M der Ebene, für welchen

$$(1) \qquad \sqrt[n]{\lambda_1 \varrho_1^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \lambda_3 \varrho_3^n} = \sqrt[n]{S_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}$$

ein Minimum wird, ferner derjenige, für welchen der Grenzwert

$$(1') \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{S_n(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)} = S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \max(\lambda_1\varrho_1, \lambda_2\varrho_2, \lambda_3\varrho_3)$$

ein Minimum wird.

Ich bemerke, daß bei dem vorliegenden Minimumproblem und bei dem entsprechenden Problem des Raumes die Einzigkeit demjenigen Umstande zu verdanken ist, daß die zu einem Minimum zu machenden Funktionen mehrerer Veränderlichen konvex sind. Ich darf vielleicht in diesem Zusammenhange erwähnen, daß der übrigens fundamentale Sturmsche Beweis eben deshalb etwas länger ausgefallen ist, weil er den letzterwähnten Umstand außer Acht läßt.

Bei dem entsprechenden räumlichen Problem ist die Lösung in den folgenden speziellen Fällen bekannt [1]):

5. Die Entfernungssumme von den Ecken eines gegebenen Tetraeders erreicht ihr einziges Minimum in demjenigen Punkte des Raumes, dessen Verbindungshalbstrahlen mit den Tetraederecken vier kongruente Trieder bestimmen, falls ein Punkt von dieser Beschaffenheit existiert; dies tritt ein, wenn die sphärischen Exzesse der Tetraederecken kleiner als π sind. Hat eine Ecke einen Exzeß $\geqq \pi$, so ist dieser Eckpunkt der Minimumpunkt.

---

[2]) [3]) Ist nämlich $X_1X_2X_3$ ein beliebiges Indreieck von $A_1A_2A_3$, so treffen sich die Umkreise der Teildreiecke $X_2X_3A_1$, $X_3X_1A_2$ und $X_1X_2A_3$ in einem Punkte P. Wird der gemeinsame Wert der Winkel $PX_1\widehat{A}_2$, $PX_2\widehat{A}_3$, $PX_3\widehat{A}_1$ mit φ bezeichnet, so ist $\overline{X_kX_l} \cdot \sin\varphi = f_i \cdot \sin\varphi = \varrho_i \sin\alpha_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Für das Fußpunktdreieck $Q_1Q_2Q_3$ ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $f_i = \varrho_i \sin\alpha_i$, und gleichzeitig erkennt man hieraus, daß das Minimum einer *monotonen* Funktion der Indreiecksseiten f_i stets für ein Fußpunktdreieck erreicht wird. Auf diese Indreiecke können wir uns also im folgenden immer beschränken.

6. Die Entfernungsquadratsumme von den Ecken eines Tetraeders erreicht ihr einziges Minimum im Schwerpunkte des Tetraeders.

7. Die größte der vier Entfernungen eines Raumpunktes von den Tetraederecken erreicht ihr einziges Minimum im Mittelpunkte der kleinsten Kugel, welche das Tetraeder enthält.

Wir werden zeigen, daß die Lösung des allgemeinen räumlichen Problems, welches die letztgenannten als spezielle Fälle umfaßt, nämlich die Bestimmung von

$$\min\left(\lambda_1 \varrho_1^n + \lambda_2 \varrho_2^n + \lambda_3 \varrho_3^n + \lambda_4 \varrho_4^n\right) = \min S_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \tag{2}$$

sich mit denselben Methoden durchführen läßt wie bei dem entsprechenden ebenen Problem (1). Dagegen scheint die Diskussion der auf die Intetraeder bezüglichen Minimumfragen nicht in voller Analogie zu den Indreiecken durchführbar zu sein.

Im folgenden stellen wir die Hauptergebnisse der Arbeit zusammen, wobei wir der Vollständigkeit halber auch manches Bekannte erwähnen werden. Dort, wo zwischen dem ebenen und räumlichen Problem ein bloß formaler Unterschied in den Dimensionszahlen besteht, werden die räumlichen Ergebnisse nur angedeutet.

Für $n \geqq 1$ hat $S_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sowie $S_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ eine einzige Minimumstelle, welche mit Ausnahme von $n = 1$ und dem Grenzfall $n \to \infty$ ein innerer Punkt des Dreiecks bzw. Tetraeders ist.

Für $S_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gilt: Von den Größen

$$L_i = \lambda_k^2 + \lambda_l^2 + 2\lambda_k \lambda_l \cos \alpha_i - \lambda_i^2 \qquad (i, k, l = 1, 2, 3;\ i, k, l \text{ zyklisch}) \tag{3}$$

kann höchstens eine negativ sein oder verschwinden. Ist $L_i \leqq 0$, so ist A_i der einzige Minimumpunkt. Sind alle $L_i > 0$, so gibt es einen inneren Punkt P_M von der Beschaffenheit, daß die Sinus seiner Winkelkoordinaten den entsprechenden Größen λ_i proportional sind, d. h.

$$\sin A_2 \widehat{P_M} A_3 : \sin A_3 \widehat{P_M} A_1 : \sin A_1 \widehat{P_M} A_2 = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3. \tag{4}$$

In diesem Falle ist P_M der Minimumpunkt.

Hieraus ergeben sich die bekannten Minimumsätze für $S_1(1, 1, 1)$ bzw. $S_1(\sin \alpha_1, \sin \alpha_2, \sin \alpha_3)$; der erste Satz führt zum Toricellischen Punkt, der zweite zum Höhenpunkt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$.

Bei dem Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ kann höchstens eine von den Größen [4])

$$\mathfrak{L}_i = \lambda_k^2 + \lambda_l^2 + \lambda_m^2 + 2\lambda_l \lambda_m \cos \alpha_{lim} + 2\lambda_m \lambda_k \cos \alpha_{mik} + 2\lambda_k \lambda_l \cos \alpha_{kil} - \lambda_i^2 \tag{5}$$
$$(i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$$

negativ sein oder verschwinden. Ist $\mathfrak{L}_i \leqq 0$, so ist A_i der Minimumpunkt von $S_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Sind alle $\mathfrak{L}_i > 0$, so gibt es einen inneren Punkt P_M von der Beschaffenheit, daß die Eckensinus, die seine Verbindungshalbstrahlen mit den Tetraederecken bestimmen, den entsprechenden Größen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ proportional sind. In diesem Falle ist P_M der Minimumpunkt.

Hieraus ergibt sich für $S_1(1, 1, 1, 1)$ der eingangs erwähnte Sturmsche Minimumsatz.

$S_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (bzw. $S_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$) erreicht sein Minimum in einem inneren Punkte P_M, dessen Flächen- (bzw. Volumen-)Koordinaten den entsprechenden Gewichten λ_i proportional sind, d. h.

$$A_2 P_M A_3 \Delta : A_3 P_M A_1 \Delta : A_1 P_M A_2 \Delta = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3. \tag{6}$$

Da der so bestimmte Punkt P_M mit dem Schwerpunkte des Massensystems $\{A_i; \lambda_i\}$ identisch ist, so folgt hieraus für $S_2(\sin^2 \alpha_1, \sin^2 \alpha_2, \sin^2 \alpha_3)$ unmittelbar:

---

[4]) α_{kml} bezeichnet den durch die Kanten $\overline{A_k A_m}$ und $\overline{A_m A_l}$ gebildeten Winkel.

Die Quadratsumme der Seiten der Indreiecke erreicht ihr Minimum für das Fußpunktdreieck des Lemoineschen Punktes von $A_1A_2A_3$.

Das Minimaldreieck ist demnach auch in diesem Falle konstruierbar und das Minimum der Quadratsumme der Seiten der Indreiecke ist

$$3D^2 \frac{\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \sin^2\alpha_3}{\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3},$$

wo D den Umkreisdurchmesser bedeutet. Analog läßt sich das Minimum der Kantenquadratsumme der Intetraeder bestimmen.

Der Minimumpunkt von [5]) $S_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ bzw. $S_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ ist folgendermaßen bestimmt:

Läßt man die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen des Massensystems $\{A_i; \lambda_i\}$ zusammenfallen und setzt man $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, so hat der Minimumpunkt P_M die Koordinaten

$$x = \frac{M_x}{3J_x + J_y + r^2}, \qquad y = \frac{M_y}{J_x + 3J_y + r^2},$$

wo

$$J_x = \Sigma\, \lambda_i x_i^2, \qquad J_y = \Sigma\, \lambda_i y_i^2, \qquad M_x = \Sigma\, \lambda_i x_i (x_i^2 + y_i^2), \qquad M_y = \Sigma\, \lambda_i y_i (x_i^2 + y_i^2)$$

und r^2 die einzige positive Wurzel der Gleichung fünften Grades

$$r^2 = \left(\frac{M_x}{3J_x + J_y + r^2}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{J_x + 3J_y + r^2}\right)^2 \tag{7}$$

bedeutet.

Diese Gleichung reduziert sich dann und nur dann auf eine Gleichung dritten Grades, wenn entweder die Hauptträgheitsellipse in einen Kreis ausartet oder eins der Momente M_x, M_y verschwindet.

Der Schwerpunkt der in den Eckpunkten konzentrierten Massen ist dann und nur dann Minimumpunkt von S_4, wenn er mit dem Umkreismittelpunkte zusammenfällt.

Das räumliche Problem führt bei entsprechenden Annahmen auf eine Gleichung siebenten Grades, welche sich bei zunehmender Symmetrie in der Massenverteilung auf eine von fünftem, drittem und erstem Grade reduziert.

Für das Minimum von

$$S^* = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{S_n(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)} = \max(\lambda_1\varrho_1, \lambda_2\varrho_2, \lambda_3\varrho_3)$$

gilt: Von den Größen

$$\mathfrak{Q}_i = \frac{\sin^2\alpha_k}{\lambda_k^2} + \frac{\sin^2\alpha_l}{\lambda_l^2} + 2\frac{\sin\alpha_k}{\lambda_k}\frac{\sin\alpha_l}{\lambda_l}\cos\alpha_i - \frac{\sin^2\alpha_i}{\lambda_i^2} \qquad (i,k,l = 1,2,3) \tag{8}$$

kann höchstens eine negativ sein oder verschwinden. Ist $\mathfrak{Q}_i \leqq 0$, so ist derjenige Punkt Minimumstelle, der die Seite $\overline{A_kA_l}$ im Verhältnis $\lambda_l : \lambda_k$ teilt. Sind alle $\mathfrak{Q}_i > 0$, so ist derjenige Punkt P_M die Minimumstelle, dessen tripolare Koordinaten ϱ_i den reziproken Werten der Gewichte proportional sind, d. h. für den

$$\lambda_1\varrho_1 = \lambda_2\varrho_2 = \lambda_3\varrho_3. \tag{9}$$

Für $\lambda_i = \sin\alpha_i$ folgt hieraus:

Die größte Seite der Indreiecke wird Minimum für dasjenige gleichseitige Fußpunktdreieck, welches zum „inneren" isodynamischen Zentrum von $A_1A_2A_3$ gehört, falls dieses ein

---

[5]) Die Untersuchung des Minimums von S_3 scheint, wegen der darin auftretenden Irrationalitäten, komplizierter zu sein.

innerer Punkt ist. Dies tritt ein, wenn die Winkel α_i kleiner als $\frac{2\pi}{3}$ sind. Ist aber ein $\alpha_i \geqq \frac{2\pi}{3}$, so wird die größte Seite bei demjenigen gleichschenkligen Dreieck ein Minimum, dessen Schenkel auf den Schenkeln von α_i senkrecht stehen.

Diese Minimaldreiecke sind also auch konstruierbar und das Minimum der größten Seite der Indreiecke ist $\left(\text{im Falle } \alpha_i < \frac{2\pi}{3}\right)$

$$D\sqrt{\frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3}{\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2 + \operatorname{ctg}\alpha_3 + \sqrt{3}}}.$$

§ 1.

Ist eine in der ganzen x, y-Ebene definierte eindeutige stetige Funktion $f(x, y)$ *von unten konvex*, d. h.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2}, \tag{10}$$

und ist

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x, y) = \infty, \tag{11}$$

so gelten bekanntlich die folgenden Sätze:

I. $f(x, y)$ hat ein endliches Minimum und die Menge der Punkte (x, y), in welchen $f(x, y)$ ihr Minimum annimmt, ist ein konvexer Bereich.

II. Wird das Gleichheitszeichen in (10) ausgeschlossen, so reduziert sich dieser Bereich auf einen Punkt, d. h.

II a. Wenn $f(x, y)$ eigentlich konvex ist und (11) gilt, so hat $f(x, y)$ ein endliches Minimum und nimmt dieses in einem einzigen, im Endlichen gelegenen Punkte an.

In diesem Falle gelten noch:

Folgerung 1. Ist ein Punkt (x_0, y_0) eine lokale Minimumstelle von $f(x, y)$, ist also

$$f(x_0, y_0) \leqq f(x_0 + \xi, y_0 + \eta) \quad \text{für} \quad |\xi| < \delta, |\eta| < \delta,$$

so ist (x_0, y_0) die einzige absolute Minimumstelle von $f(x, y)$.

Folgerung 2. Ist in einem Punkte (x_0, y_0)

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

so ist (x_0, y_0) die einzige absolute Minimumstelle.

Die im vorliegenden Minimumproblem auftretende Funktion

$$S_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\varrho_1^n + \lambda_2\varrho_2^n + \lambda_3\varrho_3^n$$

ist für $n \geqq 1$ (bei den dort gemachten Voraussetzungen) eigentlich konvex. Für $n > 1$ sind nämlich schon die einzelnen Glieder eigentlich konvex, und wenn das Dreieck nicht ausgeartet ist, so ist auch $\lambda_1\varrho_1 + \lambda_2\varrho_2 + \lambda_3\varrho_3$ eigentlich konvex.

Die Oberfläche des konvexen Bereiches, der der gemeinsame Teil der drei Kreiskegel $z \geqq \lambda_i\varrho_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ist, wird durch die Gleichung

$$z = \max(\lambda_1\varrho_1, \lambda_2\varrho_2, \lambda_3\varrho_3)$$

dargestellt. Die Funktion

$$S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{S_n(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)} = \max(\lambda_1\varrho_1, \lambda_2\varrho_2, \lambda_3\varrho_3)$$

ist demnach gleichfalls konvex [6]).

[6]) Die obigen Sätze gelten auch für die nicht eigentlich konvexe Funktion $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, weil die Fläche $z = \max(\lambda_1\varrho_1, \lambda_2\varrho_2, \lambda_3\varrho_3)$ keine zu der x, y-Ebene parallele Strecke enthält.

Da nun offenbar auch die Bedingungen

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} S_n = \infty \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad \lim_{x^2+y^2\to\infty} S^* = \infty$$

erfüllt sind, so gilt folgender

Einzigkeitssatz. Die Funktionen $S_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ für $n \geqq 1$ und $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ besitzen bei den gemachten Voraussetzungen ein endliches, positives Minimum und nehmen dieses in einem einzigen, im Endlichen gelegenen Punkte an. Die Folgerungen 1 und 2 gelten auch für S_n $(n \geqq 1)$ und S^*.

Der Minimumpunkt von S_n und S^* liegt sogar im Inneren oder auf dem Rande des Dreiecks $A_1A_2A_3$, denn es gibt für einen äußeren Punkt immer eine Verschiebung, bei welcher alle Entfernungen ϱ_i abnehmen.

Alle vorstehenden Sätze gelten auch in einem Raume von beliebiger Dimensionszahl.

§ 2.

Wir wollen zunächst die Bedingungen aufstellen, wann eine Funktion von der Form

$$f(x, y) = g(r) + h(x, y) \quad \text{mit} \quad r = \underset{+}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{12}$$

wo $g(r)$ für $r = +0$ und $h(x, y)$ für $x = y = 0$ stetig differenzierbar ist, im Punkte $r = x = y = 0$ ein lokales Minimum besitzt.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Differenz

$$f(x, y) - f(0, 0) = rg'(\vartheta_1 r) + xh'_x(\vartheta_2 x, \vartheta_2 y) + yh'_y(\vartheta_2 x, \vartheta_2 y) \qquad (0 < \vartheta_1, \vartheta_2 < 1).$$

Aus

$$(xh'_x + yh'_y)^2 \leqq (x^2 + y^2)(h'^2_x + h'^2_y)$$

folgt

$$f(x, y) - f(0, 0) \geqq r[g' - \sqrt{h'^2_x + h'^2_y}].$$

Wenn also $g'(0)^2 > h'_x(0, 0)^2 + h'_y(0, 0)^2$ ist, so ist für hinreichend kleine $|x|$ und $|y|$

$$f(x, y) > f(0, 0).$$

Ist umgekehrt $g'(0)^2 < h'_x(0, 0)^2 + h'_y(0, 0)^2$, so ist für eine geeignete Richtung θ und hinreichend kleines r

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0, 0) = r[g' - (h'_x\cos\theta + h'_y\sin\theta)] = r[g' - \sqrt{h'^2_x + h'^2_y}] < 0.$$

Wir haben also den

Hilfssatz. Dafür, daß eine differenzierbare Funktion von der Form

$$f(x, y) = g(r) + h(x, y), \qquad r = \underset{+}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}},$$

im Punkte (x_0, y_0) Minimum wird, ist hinreichend, daß

$$g'(0)^2 > h'_x(x_0, y_0)^2 + h'_y(x_0, y_0)^2 \tag{13}$$

ist. Wenn umgekehrt

$$g'(0)^2 < h'_x(x_0, y_0)^2 + h'_y(x_0, y_0)^2$$

ist, so kann $f(x, y)$ im Punkte (x_0, y_0) kein Minimum haben.

Der Fall $g'(0)^2 = h'_x(x_0, y_0)^2 + h'_y(x_0, y_0)^2$ erfordert im allgemeinen weitere Untersuchungen.

Dieselben Betrachtungen gelten offenbar für einen Raum von beliebiger Dimension.

Setzt man $r = \varrho_i$, $g(r) = \lambda_i\varrho_i^n$, $h(x, y) = \lambda_k\varrho_k^n + \lambda_l\varrho_l^n$, so folgt aus dem Obigen unmittelbar:

Der Minimumpunkt von $S_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ bzw. $S_n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ ist für $n = 1$ bei den Bedingungen

$$(3) \qquad L_i = h_x'^2 + h_y'^2 - g'^2 = \lambda_l^2 + \lambda_k^2 + 2\lambda_l \lambda_k \cos \alpha_i - \lambda_i^2 > 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

bzw.

$$(5) \quad \Omega_i = \lambda_k^2 + \lambda_l^2 + \lambda_m^2 + 2\lambda_l \lambda_m \cos \alpha_{lim} + 2\lambda_m \lambda_k \cos \alpha_{mik} + 2\lambda_k \lambda_l \cos \alpha_{kil} - \lambda_i^2 > 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

und für $n \geqq 2$ ausnahmslos von den Ecken des Dreiecks $A_1A_2A_3$ bzw. des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ verschieden.

Ist $n = 1$ und ein $L_i \leqq 0$ bzw. $\Omega_i \leqq 0$, so ist nach der Folgerung 1 des Einzigkeitssatzes die Ecke A_i der einzige Minimumpunkt von S_1.

Hieraus ergibt sich auch, daß höchstens eine von den Größen L_i bzw. Ω_i negativ sein oder verschwinden kann, was man übrigens auch direkt unschwer beweisen kann.

§ 3.

Wenn $n \geqq 2$ ist oder $n = 1$ und $L_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ bzw. $\Omega_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ist, so ist nach dem Vorhergehenden der Minimumpunkt von S_n von den Ecken des Dreiecks $A_1A_2A_3$ bzw. des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ verschieden. S_n ist aber mit Ausnahme der Ecken eine stetig differenzierbare Funktion der Koordinaten, im jetzt betrachteten Falle müssen also ihre partiellen Ableitungen im Minimumpunkte verschwinden, d. h. es ist

$$\lambda_1 \varrho_1^{n-1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + \lambda_2 \varrho_2^{n-1} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \lambda_3 \varrho_3^{n-1} \frac{\partial \varrho_3}{\partial x} = \lambda_1 \varrho_1^{n-1} \cos(\varrho_1, x) + \lambda_2 \varrho_2^{n-1} \cos(\varrho_2, x) + \lambda_3 \varrho_3^{n-1} \cos(\varrho_3, x) = 0,$$

$$\lambda_1 \varrho_1^{n-1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} + \lambda_2 \varrho_2^{n-1} \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \lambda_3 \varrho_3^{n-1} \frac{\partial \varrho_3}{\partial y} = \lambda_1 \varrho_1^{n-1} \cos(\varrho_1, x) + \lambda_2 \varrho_2^{n-1} \cos(\varrho_2, x) + \lambda_3 \varrho_3^{n-1} \cos(\varrho_3, x) = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$(14) \quad \lambda_1 \varrho_1^{n-1} : \lambda_2 \varrho_2^{n-1} : \lambda_3 \varrho_3^{n-1} = \begin{vmatrix} \cos(\varrho_1 x) & \cos(\varrho_2 x) & \cos(\varrho_3 x) \\ \cos(\varrho_1 y) & \cos(\varrho_2 y) & \cos(\varrho_3 y) \end{vmatrix} = \sin(\varrho_2 \varrho_3) : \sin(\varrho_3 \varrho_1) : \sin(\varrho_1 \varrho_2).$$

Nach dem Einzigkeitssatze gibt es bei den oben gemachten Voraussetzungen einen und nur einen Punkt P_M, welcher die Bedingung (14) erfüllt.

Im Falle $n = 1$ und $L_i > 0$ ist also der Minimumpunkt P_M von der Beschaffenheit, daß die Sinus seiner Winkelkoordinaten $\widehat{\varrho_k \varrho_l}$ den Gewichten λ_i proportional sind. Demnach kann P_M konstruiert werden, indem man die drei Kreisbögen zieht, von deren Punkten aus die entsprechenden Seiten unter den Außenwinkeln des mit den Seiten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gebildeten Dreiecks erscheinen. Der gemeinsame Schnittpunkt dieser Bögen ist der Minimumpunkt P_M von $S_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Im Falle $n = 2$ ist

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \varrho_2 \varrho_3 \sin(\varrho_2 \varrho_3) : \varrho_3 \varrho_1 \sin(\varrho_3 \varrho_1) : \varrho_1 \varrho_2 \sin(\varrho_1 \varrho_2)$$

und der Minimumpunkt P_M von $S_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ von der Beschaffenheit, daß seine Flächenkoordinaten — die Teildreiecke $P_M A_2 A_3$, $P_M A_3 A_1$, $P_M A_1 A_2$, welche seine Verbindungshalbstrahlen mit den Ecken bestimmen — den Gewichten λ_i proportional sind. Zieht man die Ecktransversalen, welche die Seiten $\overline{A_k A_l}$ im Verhältnis $\lambda_k : \lambda_l$ teilen, so ist der gemeinsame Punkt dieser Transversalen der Minimumpunkt P_M von $S_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Der so bestimmte Punkt P_M ist bekanntlich mit dem Schwerpunkt des Massensystems $\{A_i; \lambda_i\}$ identisch.

Beim räumlichen Problem folgt aus dem Verschwinden der partiellen Ableitungen ähnlich:

$$(15)\qquad \lambda_1 \varrho_1^{n-1} : \lambda_2 \varrho_2^{n-1} : \lambda_3 \varrho_3^{n-1} : \lambda_4 \varrho_4^{n-1}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos(\varrho_1 x) & \cos(\varrho_2 x) & \cos(\varrho_3 x) & \cos(\varrho_4 x) \\ \cos(\varrho_1 y) & \cos(\varrho_2 y) & \cos(\varrho_3 y) & \cos(\varrho_4 y) \\ \cos(\varrho_1 z) & \cos(\varrho_2 z) & \cos(\varrho_3 z) & \cos(\varrho_4 z) \end{vmatrix} = \sin(\varrho_2\varrho_3\varrho_4) : \sin(\varrho_3\varrho_4\varrho_1) : \sin(\varrho_4\varrho_1\varrho_2) : \sin(\varrho_1\varrho_2\varrho_3),$$

wo $\sin(\varrho_i \varrho_k \varrho_l)$ den Eckensinus des durch ϱ_i, ϱ_k, ϱ_l bestimmten Trieders bedeutet.

Hieraus folgen, mit Rücksicht auf § 2, unmittelbar die charakteristischen Eigenschaften des Minimumpunktes von $S_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ und $S_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, die in der Einleitung angegeben worden sind.

§ 4.

Sind im Falle $S_1(1, 1, 1) = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3$ die drei entsprechenden Größen (3)

$$L_i = 1 + 2\cos\alpha_i > 0, \quad \text{d. h.} \quad \alpha_i < \frac{2\pi}{3},$$

so gibt es einen inneren Punkt P_M, welcher gleiche Winkelkoordinaten hat, nämlich den Toricellischen Punkt des Dreiecks. Im Falle $L_i \leqq 0$, $\alpha_i \geqq \frac{2\pi}{3}$ ist A_i der Minimumpunkt von $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3$.

Sind im Falle $S_1(\sin\alpha_1, \sin\alpha_2, \sin\alpha_3) = f_1 + f_2 + f_3$ die drei entsprechenden Größen (3)

$$L_i = \sin^2\alpha_k + \sin^2\alpha_l + 2\sin\alpha_k \sin\alpha_l \cos\alpha_i - \sin^2\alpha_i = 4\sin\alpha_l \sin\alpha_k \cos\alpha_i > 0, \text{ d. h. } \alpha_i < \frac{\pi}{2},$$

so gibt es einen inneren Punkt P_M, dessen Winkelkoordinaten den entsprechenden Außenwinkeln des Dreiecks $A_1A_2A_3$ gleich sind, das ist der Höhenpunkt des Dreiecks. In diesem Falle [7]) besitzt also das Fußpunktdreieck des Höhenpunktes den kleinsten Umfang $f_1 + f_2 + f_3$ unter allen Indreiecken. Im Falle $L_i \leqq 0$, $\alpha_i \geqq \frac{\pi}{2}$ hat das ausgeartete Fußpunktdreieck von A_i, nämlich die doppelt genommene kleinste Höhe den minimalen Umfang.

Sind im Falle $S_1(1, 1, 1, 1) = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4$ die vier entsprechenden Größen (5)

$$\Omega_i = 2(1 + \cos\alpha_{lim} + \cos\alpha_{mik} + \cos\alpha_{kil}) > 0,$$

so haben nach der bekannten Formel [8])

$$(16)\qquad \cos\frac{\varepsilon_i}{2} = \frac{1 + \cos\alpha_{lim} + \cos\alpha_{mik} + \cos\alpha_{kil}}{4\cos\frac{\alpha_{lim}}{2}\cos\frac{\alpha_{mik}}{2}\cos\frac{\alpha_{kil}}{2}}$$

alle Tetraeder-Ecken einen sphärischen Exzess ε_i kleiner als π. Dann gibt es einen inneren Punkt P_M, dessen tetrapolare Koordinaten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ vier Trieder mit gleichen Eckensinus bestimmen. Aus der Gleichheit der Eckensinus folgt aber nach einem bekannten Satze die Kongruenz der vier Trieder, und damit ist das in der Einleitung erwähnte Sturmsche Ergebnis wiedergewonnen. Hat die bei A_i liegende Tetraederecke

---

[7]) Ein besonders einfacher, direkter Beweis dieses Satzes stammt von L. Fejér; siehe Rademacher-Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, 2. Aufl. (Berlin 1933), S. 23—26.

[8]) Vgl. z. B. R. Baltzer, Elemente der Mathematik **2** (Leipzig 1883), 6. Buch (Trigonometrie), § 6.

einen Exzeß $\varepsilon_i \geqq \pi$, so ist nach (16) $L_i \leqq 0$, alsdann ist A_i der Minimumpunkt von $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4$.

Der Minimumpunkt P_M von $S_1(1, 1, 1, 1)$ ist im allgemeinen nicht konstruierbar. Im speziellen Falle aber, wenn das Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ gleichflächig ist, fällt der Minimumpunkt P_M — wie es schon von R. Sturm bemerkt worden ist — mit dem Umkugelmittelpunkt des Tetraeders zusammen.

Auch der Minimumpunkt von $S_1(F_1, F_2, F_3, F_4)$ — wo F_i die Seitenfläche $A_kA_lA_m$ des Tetraeders bedeutet — ist in einem speziellen Falle konstruierbar, dann nämlich, wenn das Tetraeder einen Höhenschnittpunkt hat.

Hat bei einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt eine Ecke einen spitzen (bzw. stumpfen) Kantenwinkel, so sind alle Kantenwinkel dieser Ecke spitz (bzw. stumpf). Hieraus folgt mit Rücksicht auf (5) und die bekannte Relation

$$F_i^2 = F_k^2 + F_l^2 + F_m^2 - 2F_lF_m \cos(F_l,F_m) - 2F_mF_k \cos(F_m,F_k) - 2F_kF_l \cos(F_k,F_l)$$

unmittelbar:

Wenn bei einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt ein

$$F_i^2 > F_k^2 + F_l^2 + F_m^2$$

ist, so ist der Scheitel der stumpfen Ecke A_i der Minimumpunkt von $S_1(F)$. Sind alle

$$F_i^2 < F_k^2 + F_l^2 + F_m^2,$$

so hat das Tetraeder nur spitze Ecken, und der Minimumpunkt P_M von $S_1(F)$ fällt mit dem Höhenschnittpunkt H zusammen.

Denn die Eckensinus der Trieder $(H; A_kA_lA_m)$ sind den Polareckensinus der Ecken A_i, also den Seitenflächen F_i proportional.

§ 5.

Die Quadratsumme der Seiten der Indreiecke wird dargestellt durch

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = S_2(\sin^2\alpha_1, \sin^2\alpha_2, \sin^2\alpha_3),$$

erreicht also (als Funktion der ϱ_i) ihr Minimum in demjenigen Punkte P_M, dessen Flächenkoordinaten den Seitenquadraten des gegebenen Dreiecks $A_1A_2A_3$ proportional sind:

$$A_2P_MA_3\Delta : A_3P_MA_1\Delta : A_1P_MA_2\Delta = \sin^2\alpha_1 : \sin^2\alpha_2 : \sin^2\alpha_3 = \overline{A_2A_3}^2 : \overline{A_3A_1}^2 : \overline{A_1A_2}^2.$$

Da der so bestimmte Punkt P_M mit dem Schwerpunkte des Massensystems $\{A_i; \overline{A_kA_l}\}$, d. h. mit dem Lemoineschen Punkte [9]) des Dreiecks $A_1A_2A_3$ identisch ist, so haben wir den Satz:

Die Seitenquadratsumme aller in das Dreieck $A_1A_2A_3$ einbeschriebenen Dreiecke erreicht ihr einziges Minimum für das Fußpunktdreieck des Lemoineschen Punktes von $A_1A_2A_3$.

Der Lemoinesche Punkt ist bekanntlich als gemeinsamer Punkt der *Symmedianen* konstruierbar, dasselbe gilt also auch von seinem Fußpunktdreieck.

Mit Benutzung der Formeln

$$\frac{\varrho_i^2}{D^2} = \frac{\lambda_k \sin^2\alpha_i + \lambda_i \sin^2\alpha_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} - \frac{\lambda_2\lambda_3 \sin^2\alpha_1 + \lambda_3\lambda_1 \sin^2\alpha_2 + \lambda_1\lambda_2 \sin^2\alpha_3}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2},$$

[9]) Der Lemoinesche Punkt kann bekanntlich durch irgend eine der folgenden charakteristischen Eigenschaften definiert werden: 1. Minimumpunkt der Quadratsumme der Entfernungen von den Dreieckseiten bzw. von den Tetraederflächen; 2. Schwerpunkt der in den Ecken angebrachten Massen, welche den Quadraten der gegenüberliegenden Dreiecksseiten bzw. Tetraederflächen proportional sind; 3. Schwerpunkt seines eigenen Fußpunktdreiecks bzw. Fußpunkttetraeders.

die die Entfernungen ϱ_i der Massen $\{A_i; \lambda_i\}$ von ihrem Schwerpunkte liefern, erhält man leicht

$$\min S_2 (\sin^2 \alpha_1, \sin^2 \alpha_2, \sin^2 \alpha_3) = 3D^2 \frac{\sin^2 \alpha_1 \cdot \sin^2 \alpha_2 \cdot \sin^2 \alpha_3}{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_3}.$$

Der Lemoinesche Punkt besitzt, nach einer Bemerkung von Gerono [10]) die charakteristische Eigenschaft, daß er der Schwerpunkt seines eigenen Fußpunktdreiecks bzw. Fußpunkttetraeders ist. Demzufolge berühren die vier Kugeln, welche durch die einzelnen Ecken des Lemoineschen Fußpunkttetraeders gehen und dessen gegenüberliegende Seitenflächenschwerpunkte zu Mittelpunkten haben, die entsprechenden Seitenflächen des Urtetraeders. Das bedeutet aber [11]), daß die Bedingungen für das Minimum der Kantenquadratsumme der Intetraeder an allen vier Ecken erfüllt sind. Da aber diese Bedingungen nur eine Lösung zulassen, so erhalten wir:

Die Kantenquadratsumme der Intetraeder erreicht ihr einziges Minimum für das Fußpunkttetraeder des Lemoineschen Punktes des Urtetraeders.

§ 6.

Bei der Bestimmung des Minimums von

$$S_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_i \lambda_i \varrho_i^4 = \sum_i \lambda_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^2$$

lauten die Bedingungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial S_4}{\partial x} &= \sum_i \lambda_i (x - x_i) [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S_4}{\partial y} &= \sum_i \lambda_i (y - y_i) [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Läßt man die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen des Massensystems $\{x_i, y_i; \lambda_i\}$ zusammenfallen und setzt $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, so werden

$$\sum_i \lambda_i x_i = \sum_i \lambda_i y_i = \sum_i \lambda_i x_i y_i = 0,$$

und aus (17) folgt unmittelbar

$$x = \frac{M_x}{3J_x + J_y + r^2}, \quad y = \frac{M_y}{J_x + 3J_y + r^2}, \quad x^2 + y^2 = r^2, \tag{18}$$

wo $M_x = \sum_i \lambda_i x_i (x_i^2 + y_i^2)$, $M_y = \sum_i \lambda_i y_i (x_i^2 + y_i^2)$ ist und J_x, J_y die Hauptträgheitsmomente bezeichnen. Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen (18) werden x und y eliminiert, und man erhält für die Bestimmung von r^2 die Gleichung fünften Grades

$$r^2 = \left(\frac{M_x}{3J_x + J_y + r^2}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{J_x + 3J_y + r^2}\right)^2, \tag{7}$$

die offensichtlich nur eine einzige positive Wurzel besitzt. Nach Berechnung dieser Wurzel ergeben sich die Koordinaten des Minimumpunktes unmittelbar aus (18).

Die Gleichung reduziert sich auf eine dritten Grades, wenn

1. die zwei Nenner rechts gleich sind, wenn also die beiden Hauptträgheitsmomente einander gleich sind,

2. eins der Momente M_x, M_y verschwindet.

Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $r = 0$ ist, also der Minimum-

---

[10]) C. Gerono, Corresp. phys. et math. **3** (1828), S. 16—20.

[11]) Die Quadratsumme der Entfernungen von drei gegebenen Punkten $A_1 A_2 A_3$ ist an jeder Kugeloberfläche konstant, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ zusammenfällt.

punkt mit dem Schwerpunkte zusammenfällt, erhält man aus (18)

$$M_x = \sum_i \lambda_i x_i (x_i^2 + y_i^2) = 0, \qquad M_y = \sum_i \lambda_i y_i (x_i^2 + y_i^2) = 0,$$

und diese Gleichungen sind mit $\sum_i \lambda_i x_i = \sum_i \lambda_i y_i = 0$ dann und nur dann verträglich, wenn Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt zusammenfallen.

Durch dieselbe Methode kann die Bestimmung von $S_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ auf eine Gleichung siebenten Grades reduziert werden.

§ 7.

Ist in dem Punkte $P(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ das eine der Produkte $\lambda_i \varrho_i$ größer als die zwei anderen, so kann in diesem Punkte die Funktion $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \max(\lambda_1 \varrho_1, \lambda_2 \varrho_2, \lambda_3 \varrho_3)$ kein Minimum haben, weil dann durch eine entsprechende Verschiebung von P das $\max(\lambda_1 \varrho_1, \lambda_2 \varrho_2, \lambda_3 \varrho_3)$ verkleinert werden kann. Bei der Aufsuchung des Minimums von $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ kommen also nur die Punkte der Kreisbögen [12])

$$\lambda_k \varrho_k = \lambda_l \varrho_l \geqq \lambda_i \varrho_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{19}$$

in Betracht.

Hat eine Dreieckseite $A_k A_l$ mit dem entsprechenden Kreisbogen $\lambda_k \varrho_k = \lambda_l \varrho_l \geqq \lambda_i \varrho_i$ einen Punkt P_M gemeinsam, so hat $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ in P_M offenbar ein lokales Minimum, P_M ist also nach dem Einzigkeitssatze der absolute Minimumpunkt von $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Für einen solchen Punkt gilt aber außer $\lambda_k \varrho_k = \lambda_l \varrho_l$ noch $\varrho_k + \varrho_l = \overline{A_k A_l} = a_i$, folglich

$$\varrho_k = \frac{\lambda_i a_i}{\lambda_k + \lambda_l}, \qquad \varrho_l = \frac{\lambda_k a_i}{\lambda_k + \lambda_l}, \qquad \lambda_k \varrho_k = \lambda_l \varrho_l = \frac{\lambda_k \lambda_l a_i}{\lambda_k + \lambda_l}.$$

Außerdem ist nach dem Stewartschen Satze

$$\varrho_i^2 = \frac{\lambda_k a_l^2 + \lambda_l a_k^2}{\lambda_k + \lambda_l} - \frac{a_i^2 \lambda_k \lambda_l}{(\lambda_k + \lambda_l)^2}.$$

Die Bedingung (19) ist also jetzt gleichwertig mit

$$\lambda_k^2 \lambda_l^2 a_i^2 \geqq \lambda_i^2 [\lambda_l^2 a_k^2 + \lambda_k^2 a_l^2 + \lambda_k \lambda_l (a_k^2 + a_l^2 - a_i^2)]$$

oder

$$\mathfrak{L}_i = \frac{\sin^2 \alpha_k}{\lambda_k^2} + \frac{\sin^2 \alpha_l}{\lambda_l^2} + 2 \frac{\sin \alpha_k \sin \alpha_l}{\lambda_k \lambda_l} \cos \alpha_i - \frac{\sin^2 \alpha_i}{\lambda_i^2} \leqq 0. \tag{8}$$

Von den Größen $\mathfrak{L}_i$ kann also höchstens eine negativ sein oder verschwinden. Ist ein $\mathfrak{L}_i \leqq 0$, so ist derjenige Punkt P_M der Seite $\overline{A_k A_l}$, für welchen $\lambda_k \varrho_k = \lambda_l \varrho_l$ gilt, der Minimumpunkt von $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, und in diesem Falle ist

$$\min \max (\lambda_1 \varrho_1, \lambda_2 \varrho_2, \lambda_3 \varrho_3) = \frac{\lambda_k \lambda_l \overline{A_k A_l}}{\lambda_k + \lambda_l}. \tag{20}$$

Wenn alle drei $\mathfrak{L}_i > 0$ sind, so kann $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sein Minimum nur im Inneren des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ annehmen. Gelten aber in einem inneren Punkte $P(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ die Beziehungen $\lambda_k \varrho_k = \lambda_l \varrho_l > \lambda_i \varrho_i$, so kann S^* dort kein Minimum haben, weil in diesem Falle durch eine geeignete Verschiebung von P das $\max(\lambda_1 \varrho_1, \lambda_2 \varrho_2, \lambda_3 \varrho_3)$ verkleinert werden kann. Für den Minimumpunkt P_M müssen also in diesem Falle die Gleichungen

$$\lambda_1 \varrho_1 = \lambda_2 \varrho_2 = \lambda_3 \varrho_3 \tag{9}$$

erfüllt sein, P_M ist demnach derjenige gemeinsame Punkt der durch die Gleichungen (9) bestimmten drei Kreise, welcher im Inneren von $A_1 A_2 A_3$ liegt.

---

[12]) Diese Kreisbögen sind die Projektionen der Kanten des in § 1 erwähnten konvexen Körpers auf die x, y-Ebene, die Funktion $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ist also in ihrem Minimumpunkt nicht differenzierbar.

Um in diesem Falle das Minimum von $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, d. h. den gemeinsamen Wert $x = \lambda_1 \varrho_1 = \lambda_2 \varrho_2 = \lambda_3 \varrho_3$ zu bestimmen, setze man in der bekannten [13]) Relation, welche die tripolaren Koordinaten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ miteinander verbindet, $\varrho_i = \frac{x}{\lambda_i}$.

Die kleinere positive Wurzel der so erhaltenen, in x^2 quadratischen Gleichung:

$$x = D \sqrt{\frac{s_1 s_2 s_3}{\sum_i \frac{s_i c_i}{\lambda_i^2} + \sqrt{2 \sum_i \left(\frac{s_k s_l}{\lambda_k \lambda_l}\right)^2 - \sum_i \left(\frac{s_i}{\lambda_i}\right)^4}}}, \tag{21}$$

wo zur Abkürzung $\sin \alpha_i = s_i$, $\cos \alpha_i = c_i$ gesetzt ist und D den Umkreisdurchmesser von $A_1 A_2 A_3$ bedeutet, ist der gesuchte Minimalwert von $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Sind im Falle $S^*(1, 1, 1) = \max(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ die drei entsprechenden Größen (8)

$$\mathfrak{L}_i = 4 \sin \alpha_k \sin \alpha_l \cos \alpha_i > 0, \quad \text{d. h. } \alpha_i < \frac{\pi}{2},$$

so ergibt sich aus (21) als Minimum der größten Entfernung $x = \frac{D}{2}$, d. h. der Umkreisradius. Im Falle $\mathfrak{L}_i \leqq 0$, $\alpha_i \geqq \frac{\pi}{2}$ ist nach (20) $\min S^*(1, 1, 1) = \frac{\overline{A_k A_l}}{2}$.

Sind im Falle $S^*(\sin \alpha_1, \sin \alpha_2, \sin \alpha_3) = \max(f_1, f_2, f_3)$ die drei Größen (8)

$$\mathfrak{L}_i = 1 + 2 \cos \alpha_i < 0, \quad \text{d. h. } \alpha_i < \frac{2\pi}{3},$$

so ergibt sich aus (21) als Minimum der größten Seite der Indreiecke

$$x = f_1 = f_2 = f_3 = D \sqrt{\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3}{\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_3 + \sqrt{3}}}.$$

Das so bestimmte gleichseitige Dreieck ist Fußpunktdreieck des inneren isodynamischen Zentrums, welches als Schnittpunkt der drei Apollonischen Kreise

$$\varrho_1 \sin \alpha_1 = \varrho_2 \sin \alpha_2 = \varrho_3 \sin \alpha_3$$

gewonnen wird. Im Falle $\mathfrak{L}_i \leqq 0$, d. h. $\alpha_i \geqq \frac{2\pi}{3}$, folgt nach (20)

$$\min \max (f_1, f_2, f_3) = D \frac{\sin \alpha_i \sin \alpha_k \sin \alpha_l}{\sin \alpha_k + \sin \alpha_l},$$

und das Minimaldreieck ist in diesem Falle das gleichschenklige Fußpunktdreieck des Schnittpunktes von $\overline{A_k A_l}$ mit der Winkelhalbierenden von α_i.

Die Bestimmung des Minimums von $S^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \max(\lambda_1 \varrho_1, \lambda_2 \varrho_2, \lambda_3 \varrho_3, \lambda_4 \varrho_4)$ kann auf dieselbe Weise durchgeführt werden, wobei drei Fälle zu unterscheiden sind, je nachdem der Minimumpunkt auf einer Kante, in einer Seitenfläche oder im Inneren des Tetraeders liegt.

§ 8.

Das Fußpunktdreieck eines Punktes $P(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ hat die Seiten $f_i = \varrho_i \sin \alpha_i$, also

$$\frac{\sin \alpha_1}{f_1} \varrho_1 = \frac{\sin \alpha_2}{f_2} \varrho_2 = \frac{\sin \alpha_3}{f_3} \varrho_3. \tag{22}$$

Die Lote von den Ecken des Urdreiecks $A_1 A_2 A_3$ auf die entsprechenden Seiten des Fuß-

[13]) Vgl. z. B. Berkhan-Meyer, Neuere Dreiecksgeometrie, Enzykl. d. math. Wiss. III. 1. 2, S. 1173 bis 1276, insbes. Nr. 25 und Fußnote 135a.

punktdreiecks treffen sich bekanntlich in einem Punkte Π, in dem isogonalen Bilde [14]) von P, und die Winkelkoordinaten von Π erfüllen offenbar die Gleichungen

$$\sin A_2\widehat{\Pi}A_3 : \sin A_3\widehat{\Pi}A_1 : \sin A_1\widehat{\Pi}A_2 = f_1 : f_2 : f_3. \tag{23}$$

Hieraus folgt unmittelbar:

Hat das Fußpunktdreieck eines inneren Punktes P die Seiten f_1, f_2, f_3, so ist P der Minimumpunkt von

$$S^*\left(\frac{\sin\alpha_i}{f_i}\varrho_i\right) = \max\left(\frac{\sin\alpha_1}{f_1}\varrho_1, \frac{\sin\alpha_2}{f_2}\varrho_2, \frac{\sin\alpha_3}{f_3}\varrho_2\right),$$

während das isogonale Bild Π von P der Minimumpunkt von

$$S_1(f_i) = f_1\varrho_1 + f_2\varrho_2 + f_3\varrho_3$$

ist.

Denn die Sinus seiner Winkelkoordinaten sind nach (23) den Seiten f_i proportional.

Auf diese Weise erklärt sich auch die einerseits bei

$$S_1(1, 1, 1) \quad \text{und} \quad S^*(\sin\alpha_1, \sin\alpha_2, \sin\alpha_3),$$

andererseits bei

$$S_1(\sin\alpha_1, \sin\alpha_2, \sin\alpha_3) \quad \text{und} \quad S^*(1, 1, 1)$$

bestehende Übereinstimmung der Schranken für die größten Dreieckswinkel, die zwischen den zwei Typen von Minima entscheiden.

Das Fußpunkttetraeder eines Punktes P habe die Seitenflächen f_1, f_2, f_3, f_4. Die Lote von den Ecken des Urtetraeders auf die entsprechenden Seitenflächen f_i treffen sich [14]) im isogonalen Bilde Π von P. Die Eckensinus der durch diese Lote bestimmten Trieder sind offenbar den Polareckensinus der Fußpunkttetraederecken, also nach einem bekannten Satze [15]) den Seitenflächen f_i proportional. Hieraus folgt:

Hat das Fußpunkttetraeder eines inneren Punktes P die Seitenflächen f_1, f_2, f_3, f_4, so ist das isogonale Bild Π von P der Minimumpunkt von

$$S_1(f_1, f_2, f_3, f_4) = f_1\varrho_1 + f_2\varrho_2 + f_3\varrho_3 + f_4\varrho_4.$$

Der Punkt kleinster Entfernungssumme bei einem Tetraeder ist also das isogonale Bild desjenigen Punktes, welcher gleichflächige Fußpunkttetraeder hat und auf Grund dieser seiner Eigenschaft als Schnittpunkt von drei Flächen zweiten Grades bestimmt ist[16]).

---

[14]) Vgl. a. a. O.[13]), insbes. Nr. 23.

[15]) Vgl. z. B. a. a. O.[1]) Zacharias, insbes. Nr. 16, Fußnote 530a.

[16]) Wenn das Fußpunkttetraeder von P gleichflächig ist, also gleiche Gegenkanten hat, so gelten die Gleichungen

$$\overline{PP}_{ik} \cdot \sin\alpha_{ik} = \overline{PP}_{lm} \cdot \sin\alpha_{lm} \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4),$$

wo α_{ik} den Flächenwinkel an der Kante $\overline{A_iA_k}$ und $\overline{PP}_{ik}$ die Entfernung des Punktes P von jener Kante bedeutet. Die Koordinaten von P erfüllen demnach die drei Gleichungen

$$\sin^2\alpha_{ik} \cdot K_{ik}(x, y, z) = \sin^2\alpha_{lm} \cdot K_{lm}(x, y, z) \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4),$$

wo das Polynom zweiten Grades $K_{ik}(x, y, z)$ das Quadrat der Entfernung des Punktes P von der Kante $\overline{A_iA_k}$ darstellt.

Damit ist die von R. Sturm herrührende, auch in die Enzykl. d. math. Wiss. aufgenommene Behauptung widerlegt, daß der Punkt kleinster Entfernungssumme beim Tetraeder *nur als Schnittpunkt von drei Flächen höherer als zweiter Ordnung* bestimmt werden kann. Vgl. auch J. Neuberg, Sur la géometrie du tétraèdre, Annales de la soc. scient. Bruxelles **33** (1909), S. 320—333.

Eingegangen 11. Juli 1937

Über lokale Ordnungseigenschaften der konformen Abbildungen.

Von *Georg Aumann* in Frankfurt a. M.

---

1. Es vermittle $w = f(z)$ eine konforme Abbildung einer Umgebung des Punktes z_0 der z-Ebene; es gibt dann auch eine offene Kreisscheibe K mit dem Mittelpunkt z_0, welche schlicht auf ein konvexes Gebiet G' abgebildet wird. Wir sagen: $f(z)$ hat *in K die (reelle) Ordnung j*, wenn es eine natürliche Zahl j gibt mit der Eigenschaft, daß für jede Strecke L in K und jede Strecke L' in G' der Durchschnitt $f(L) \frown L'$ aus höchstens j Komponenten besteht[1]). Es hängt j von K ab, $j = j(K)$, und es gilt für jede in K enthaltene (etwa konzentrische) Kreisscheibe K_1 offenbar $j(K_1) \leqq j(K)$. Unter der *Ordnung $j(z_0)$ von $w = f(z)$ im Punkte z_0* versteht man $\lim_{K_1 \to z_0} j(K_1)$, wobei $z_0 < K_1$. Dieser Ordnungsbegriff reiht sich zwanglos in die kürzlich von Herrn Haupt entwickelte allgemeine Ordnungstheorie ein, und liefert damit ein bedeutsames weiteres Beispiel dieser Theorie[2]). Aus den Hauptschen Untersuchungen folgt, daß K darstellbar ist als (in K) abgeschlossene Hülle einer Summe von paarweise fremden offenen ordnungshomogenen Mengen, d. h. Mengen, in denen $j(z)$ konstant ist. Es ergibt sich nun die Aufgabe, die Teilgebiete von K zu bestimmen, in welchen f ordnungshomogen ist. Die Verhältnisse sind nun bei den konformen Abbildungen überraschend einfach; es gilt der

Satz von der Ordnungshomogenität der konformen Abbildungen.

I. *Hat die im Gebiet G konforme Abbildung $w = f(z)$ in einem einzigen Punkt z_0 von G die Ordnung 1 oder 2, dann auch in jedem Punkt von G. Im Falle der Ordnung 1 ist f ganz linear, d. h. Lösung der Differentialgleichung*

$$f'' = 0, \tag{I}$$

im Falle der Ordnung 2 genügt f der Differentialgleichung

$$\frac{f' f'''}{f''^2} = r \qquad (f'' \neq 0), \tag{II}$$

mit reeller Konstanten r; es gilt auch das Umgekehrte.

II. *Hat die im Gebiet G konforme Abbildung $w = f(z)$ in keinem Punkt von G die Ordnung 1 oder 2, so hat sie in allen Punkten z von G, wo gleichzeitig*

$$f'' \neq 0 \quad \text{und} \quad \Im\left(\frac{f' f'''}{f''^2}\right) \neq 0$$

sind, die lokale Ordnung $j(z) = 3$.

---

[1]) Davon zu unterscheiden ist die *lineare analytische Ordnung*, erklärt als die maximale Wurzelanzahl einer Gleichung $az + b = f(z)$ in K. — Der Ordnungsbegriff bei Abbildungen läßt sich übrigens auf den bei Punktmengen zurückführen, indem man im Punktraum (z, w) die Ordnungseigenschaften der durch $w = f(z)$ definierten Punktmenge untersucht; je nach Wahl der Ordnungscharakteristiken erhält man dann die verschiedenen Ordnungstypen.

[2]) O. Haupt, Zum Verteilungssatz der Strukturtheorie reeller Gebilde, Monatsh. f. Math. u. Phys. **46** (1937).

Die „ordnungssingulären" Punkte von $w = f(z)$ sind also jene, wo entweder $f'' = 0$ oder $f'' \neq 0$ und $\Im\left(\frac{f'f'''}{f''^2}\right) = 0$ ist. Darüber hinaus gilt:

III. *Für die Punkte z, wo gleichzeitig $f'' \neq 0$, $\frac{f'f'''}{f''^2} \neq 1$, $\Im\left(\frac{f'f'''}{f''^2}\right) = 0$ und $\Im\left(\frac{f'^2 f^{IV} - f'f''f'''}{f'f''f''' - f''^3}\right) \neq 0$ sind, ist $j(z) = 4$. Genügt f keiner Differentialgleichung*

$$\frac{f'^2 f^{IV} - f'f''f'''}{f'f''f''' - f''^3} = R\left(\frac{f'f'''}{f''^2}\right), \tag{III}$$

wo $R(s)$ analytisch und reell für reelles s, so liegen jedenfalls die Punkte z mit $j(z) \geqq 5$ isoliert in G.

2. *Beweis von* I. Unter den in I gemachten Voraussetzungen gibt es[3]) einen Kreis K um z_0 mit $j(K) = 1$ bzw. 2. Hieraus folgt dann unter Benutzung eines von mir kürzlich bewiesenen Satzes[4]) sofort die Behauptung. Es sind nämlich die Lösungen der Differentialgleichung (II) bis auf je eine Ähnlichkeitstransformation in w und in z gegeben durch die Funktionen z^p, e^z und $\log z$, wobei p reell und von Null und Eins verschieden ist.

Beweis von II. Es sei $f'(z_0) \neq 0$, $f''(z_0) \neq 0$. Wir betrachten eine Gerade

$$z = at + b \tag{1}$$

mit $|a| = 1$ und reellem Parameter t, welche eine Umgebung von z_0 durchsetzen möge, in der f' und f'' nicht verschwinden. Die Krümmung der durch $w = f(at + b)$ in der w-Ebene dargestellten Kurve C ist gegeben durch

$$k = \frac{1}{|f'|}\Im(Fa), \qquad F = \frac{f''}{f'}. \tag{2}$$

Wir wollen zunächst über etwaige Wendepunkte von C Aufschluß bekommen. Die Urbilder derselben sind unter den Schnittpunkten von (1) mit der Kurve

$$\Im(Fa) = 0 \tag{3}$$

zu suchen. Wir setzen nun weiter voraus, daß $F'(z) \neq 0$ ist in einer ganzen Umgebung von $z = z_0$. Dann läßt sich die Kurve (3) parametrisieren, etwa in der Form $z = z(s)$ mit $|\dot{z}| = 1$ $\left(\dot{z} = \frac{dz}{ds}\right)$. Halten wir a fest und lassen b variieren, so liefert (1) eine Schar paralleler Geraden, auf welchen durch (3) diejenigen Punkte z ausgeschnitten werden, die auf Punkte mit verschwindender Krümmung abgebildet werden. Die Kurve (3) bilde mit der genannten Geradenschar den Winkel ϑ; dann ist

$$\sin\vartheta = \Im\left(\frac{\dot{z}}{a}\right).$$

Da auf (3) gewiß $\Im(F'\dot{z}a) = 0$ ist, so auch $\Im\left(\frac{F'}{F^2}\frac{\dot{z}}{a}\right) = 0$. Hieraus folgt[5])

$$\sin\vartheta = \pm\,\Im\left(\frac{F'}{F^2}\right)\left|\frac{F^2}{F'}\right| = \pm\,\Im(F'a^2)\,\frac{1}{|F'|}. \tag{4}$$

Ist nun im betrachteten Punkt z_0 der Imaginärteil von $\frac{F'}{F^2}$, d. h. $\Im\left(\frac{f'f'''}{f''^2}\right)$ von Null verschieden, so gilt dies auch für alle Punkte eines Kreises K^* um z_0. Man kann K^*

[3]) O. Haupt, a. a. O. [2]).

[4]) G. Aumann, Konforme Abbildungen mit Ordnungseigenschaften, Deutsche Math. **2** (1937).

[5]) Man benutze: Sind α, β komplexe Zahlen mit $\alpha \neq 0$ und $\Im(\alpha\beta) = 0$, so gilt $\Im(\beta) = \pm\,\Im(\alpha)\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$.

zudem so klein wählen, daß 1. die Gesamtabsolutkrümmung $\int |d \arg f'|$ des Bildes jeder in K^* liegenden Strecke beliebig klein wird, etwa kleiner als $\frac{\pi}{2}$; und daß 2. in K^* überall $F \neq 0$ ist. Unter diesen Voraussetzungen durchsetzt im Kreis K^* die Kurve (3) die Geradenschar (1) bei jeder Wahl der Konstanten a. Die den Schargeraden entsprechenden Bildkurvenbogen können daher, soweit ihre Urbilder in K^* liegen, höchstens einen Punkt mit verschwindender Krümmung besitzen. Da außerdem die Gesamtkrümmung jedes dieser Bogen kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, so werden diese Bildkurven von jeder Geraden in höchstens 3 Punkten geschnitten. Nach I müssen aber gewisse Geraden tatsächlich in mindestens 3 Komponenten schneiden. Also ist $j(z_0) = 3$, w. z. z. w.

Beweis von III. Wir untersuchen die Änderung von $q = \Im(F'a^2)$ auf der Kurve (3). Es ist

$$\dot{q} = \Im(F''a^2\dot{z}),$$

und da auf (3) auch $\Im(FF'a^2\dot{z}) = 0$, so folgt

$$\dot{q} = \pm \Im\left(\frac{F''}{FF'}\right)|FF'|. \tag{5}$$

Betrachten wir nun einen Punkt z_0, wo gleichzeitig $F \neq 0$, $F' \neq 0$, d. h. $\frac{f'f'''}{f''^2} \neq 1$, ferner $\sigma = \Im\left(\frac{F'}{F^2}\right) = \Im\left(\frac{f'f'''}{f''^2}\right) = 0$, $\tau = \Im\left(\frac{F''}{FF'}\right) = \Im\left(\frac{f'^2f^{IV} - f'f''f'''}{f'f''f''' - f''^3}\right) \neq 0$ sind, so berührt die durch z_0 gehende Kurve (3)[6]) wegen $\sigma = 0$ nach (4) im Punkt z_0 die betreffende Gerade der Schar (1) und bleibt wegen $\tau \neq 0$ nach (5) in einer gewissen Umgebung von z_0 ganz auf einer Seite dieser berührenden Geraden, während sie die übrigen Geraden der genannten Schar in 0 oder 2 Punkten schneidet; dieses Verhalten von (3) gilt auch noch für Werte a, die in genügender Nähe von a_0 liegen; τ ist nämlich für kleine Werte von $\sin\vartheta$ ein Maß für die Krümmung der Kurve (3). Andererseits läßt sich für alle a, die außerhalb einer festen Umgebung von a_0 (und von $-a_0$) bleiben, eine Umgebung U von z so abgrenzen, daß die zugehörigen Kurven (3) zu U fremd sind. Es gibt also eine Umgebung von z_0, in welcher jede Gerade (1) mit der zugehörigen Kurve (3) höchstens 2 Schnittpunkte gemein hat. Daraus folgt (wieder mit Benutzung der im Beweis von II vorgenommenen Umgebungseinschränkung) $j(z_0) \leqq 4$. Aber, wie man sich leicht überlegt, treten tatsächlich in beliebiger Nähe von z_0 Strecken auf, deren Bilder mit einer Geraden 4 Schnittpunkte gemein haben. Somit ist $j(z_0) = 4$.

Die regulär analytischen Kurven $\sigma = 0$ und $\tau = 0$ haben entweder nur isolierte Punkte gemein oder sie fallen zusammen. Sehen wir im letzten Fall von der Möglichkeit ab, daß auf $\sigma = 0$ auch der Realteil von $\frac{f'f'''}{f''^2}$ konstant ist, was zur Folge hätte, daß f der Differentialgleichung (II) genügen würde, so ist auf $\sigma = 0$ sowohl $\frac{F'}{F^2}$ als auch $\frac{F''}{FF'}$ reell, insbesondere die erste Größe nicht identisch konstant. Es gibt also eine reelle analytische Funktion $R(s)$, so daß auf $\sigma = 0$

$$\frac{F''}{FF'} = R\left(\frac{F'}{F^2}\right);$$

diese Differentialgleichung besteht aber dann nicht nur auf $\sigma = 0$, sondern ganz allgemein.

---

[6]) Zu gegebenem z_0 gibt es im wesentlichen nur ein $a = a_0$ mit $\Im(Fa) = 0$, da das Vorzeichen von a bedeutungslos ist.

3. Als den „häufigeren“ Fall wird man nach dem Vorausgehenden denjenigen ansehen müssen, in welchem f keiner der Differentialgleichungen (I), (II), (III) genügt[7]). Dann ist in allen Konformitätspunkten ($f' \neq 0$) die lokale Ordnung $j \geqq 3$, und zwar $j(z) = 3$ in den Punkten der offenen (überalldichten) Punktmenge $f'' \neq 0$, $\sigma \neq 0$, ferner $j(z) = 4$ auf der Kurve $\sigma = 0$ in der (darauf offenen) (überall dichten) Punktmenge $f'' \neq 0$, $\frac{f'f'''}{f''^2} \neq 1$, $\tau \neq 0$. Von den restlichen, nur isoliert liegenden Punkten läßt sich zunächst nur sagen, daß $j \geqq 3$ ist.

4. Die Frage nach der lokalen Ordnung in den ordnungssingulären Punkten bedarf noch der vollständigen Klärung; es ist zu vermuten, daß ganz allgemein die Punkte z mit $j(z) \geqq 5$ isoliert liegen. Als weitere Aufgaben ergeben sich die Untersuchung der Ordnung in Punkten, in denen die Konformität gestört ist, und das *Ordnungsproblem im Großen*, welches für den Fall $j = 1$, $j = 2$ schon gelöst ist[4]).

Anstatt, wie hier, die geraden Linien als Ordnungscharakteristiken zu benutzen, kann man auch die Kreise als solche heranziehen; statt der oben betrachteten, *linearen* Ordnung erhält man dann die *zyklische* Ordnung. Diese dürfte gerade bei den konformen Abbildungen von einiger Bedeutung sein und analoge Homogenitätseigenschaften besitzen.

[7]) Allerdings ist jede reelle analytische Funktion für ein geeignetes R Lösung der Differentialgleichung (III), so daß die obige Bezeichnung „häufiger“ nicht statistisch, sondern wahrscheinlichkeitsgeometrisch zu verstehen ist.

Eingegangen 6. August 1937.

Nachtrag bei der Korrektur.

Das vorstehend behandelte Ordnungsproblem geht bei Zerlegung von z und $f(z)$ in reellen und lateralen Teil über in dasjenige reelle Problem, bei welchem im euklidischen R_4 die Ordnung gewisser zweidimensionaler „Flächenstücke“ F_2 definiert ist vermittelst ihrer Durchschnitte mit linearen, zweidimensionalen L_2, welche nur von vier Parametern abhängen (vgl. Fußnote [1])). Allgemein gesprochen, haben wir also einen Spezialfall der „Probleme (Q)“ vor uns, bei welchen im R_{2k} die Ordnung gewisser F_k erklärt wird vermittelst ihrer Durchschnitte mit linearen L_k, welche einen $(k + 2q(k - q))$-dimensionalen Teilraum des $(k + k^2)$-dimensionalen Raumes *aller* $L_k < R_{2k}$ bilden ($0 < q < k$; oben war $k = 2, q = 1$). Derartige Probleme (Q) scheinen noch nicht betrachtet worden zu sein[8]). Hingegen hat Herr Haupt für die mit Hilfe *aller* L_k definierte Ordnung gezeigt[9]), daß unter gewissen Differenzierbarkeitsannahmen (A) die maximal mögliche Ordnung m ordnungshomogener Gebilde F_k im R_n gleich $(1 + k(n - k))$ ist, abgesehen höchstens von gewissen „Ausnahme-F_k“, die einem gewissen System (R*) von partiellen Differentialgleichungen genügen. Wie mir Herr Haupt freundlicherweise mitgeteilt hat, lassen sich nun seine Überlegungen, soweit die Annahmen (A) erfüllt sind, ebenfalls bei Problemen (Q)

[8]) Noch allgemeiner wäre das Ordnungsproblem bei einer F_k im R_n bezüglich eines r-dimensionalen Teilraumes aller L_{n-k}. Hiervon scheint bis jetzt nur der Fall $k = 1$, $r = 1$ untersucht. Vgl. O. Haupt, Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Crelles Journal **167** (1931), 20ff.

[9]) O. Haupt, Zur Differentialgeometrie k-dimensionaler Gebilde im R_n, Crelles Journal **176** (1936), 95ff., insbes. § 3.

durchführen und ergeben $m \leqq 1 + 2(k-q)q$. Für unseren Fall $k = 2, q = 1$ ergibt sich also aus diesen allgemeinen Überlegungen, daß, von Ausnahmen abgesehen, $m \leqq 3$ ist. Natürlich kann bei einem Problem (Q) das Minimum der Ordnung ordnungshomogener F_k ebenfalls niedriger sein als im Hauptschen Falle. Daß übrigens die hiernach möglichen Ordnungen ordnungshomogener Teile stets realisierbar sind, dürfte sich mit Hilfe der entsprechenden Hauptschen Überlegungen [10]) ebenfalls für Probleme (Q) dartun lassen. Was die auch beim Problem (Q) auftretenden partiellen Differentialgleichungen (R*) angeht, so zeigt eine Nachprüfung, daß dem System (R*) in unserem Falle genau die Differentialgleichung $f'f''' = rf''^2$ mit reeller Konstanten r entspricht, welche genau die oben genannten Differentialgleichungen (I) und (II) umfaßt. In der Tat sind nun die zu den Differentialgleichungen (I) und (II) gehörigen Abbildungen als „Ausnahmen" im Hauptschen Sinne zu bezeichnen, weil, wenn man die Ordnung im Hauptschen Sinne erklärt (es zählt die Punktmächtigkeit von $f(L) \frown L'$, und nicht, wie bei uns, die Komponentenmächtigkeit), diese Abbildungen in jedem Punkt die Ordnung Unendlich besitzen.

[10]) Siehe Haupt, a. a. O. [9]), § 1.

Eingegangen 22. November 1937.

Achter Wettbewerb der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V.

Wissenschaftlicher Wettbewerb 1938.

Die Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V. schreibt einen sich jährlich wiederholenden Wettbewerb für wissenschaftliche Arbeiten aus. Zugelassen sind wissenschaftliche Arbeiten von Wert aus den Gebieten der Zeitmeßkunde und Uhrentechnik. Ein festes Thema wird nicht vorgeschlagen. Jeder Bewerber kann sich das besondere Thema, das er bearbeiten will, selbst auswählen. Von den zur Bearbeitung angeregten Themen sei das folgende erwähnt:

Es ist die Einwirkung von Erschütterungen und rhythmischen Bewegungen auf den Gang tragbarer Uhren zu untersuchen. Erwartet wird vor allem eine mathematische Behandlung des Gegenstandes und Belegung der Ergebnisse durch praktische Versuche. Es sind auch kleinere Schwingungszeiten der Unruh als die gewöhnlichen einzubeziehen.

Die Teilnahme ist offen für jedermann. — Für das Jahr 1938 steht ein Betrag von 2000 RM für Preise zur Verfügung. Wettbewerbsarbeiten müssen jeweils bis zum 1. April des Jahres bei der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V., Berlin SW 68, Neuenburger Str. 8, in einer für den Druck geeigneten Form eingereicht sein, um in dem betreffenden Jahre zur Wertung zu gelangen. Später einlaufende Arbeiten können in der Regel erst beim nächstjährigen Wettbewerb gewertet werden.

Es kommen nur solche Arbeiten in Frage, die bisher weder ganz noch teilweise veröffentlicht worden sind. Arbeiten, die nicht in vollständig druckfertiger Form eingeliefert sind, werden keiner Bewertung durch die Preisrichter unterzogen. Die Veröffentlichung der preisgekrönten Arbeit erfolgt (unter Umständen in gekürzter Form) auf Kosten der Gesellschaft. Die Entscheidung der Preisrichter ist endgültig und unanfechtbar.

Weitere Auskünfte erteilt der Obmann des wissenschaftlichen Ausschusses der Gesellschaft, Oberregierungsrat Dr. A. Repsold, Hamburg 3, Deutsche Seewarte.

Eingegangen 5. Dezember 1937.